

最急降下法を用いた点加振で生じる地中深部へ伝わる実体波の伝播特性の検討

東京理科大学 学生会員 ○和嶋 泰亮
東京理科大学 正会員 東平 光生

1 はじめに

1904 年の Lamb の論文¹⁾以来, 点加振で生じる自由表面を有する弾性波動場の特性の検討は, 様々な研究者によって行われてきた²⁾. Lamb は地表面の点加振解を無限積分で表現し, 留数定理から表面波を, 分岐線積分から実体波を導出している. この中で分岐線積分で導出される実体波よりも, 留数定理から導出される表面波の数学的扱いは比較的容易であり, 地表面で波動を観測する場合には分岐線積分の寄与は大きくなならないこともある. しかし, 著者らは地表面点加振によって生じた波動を地中深部の媒質の変動領域に波動を照射する数値実験を行っており, こうした場合には, 留数定理のみから入射波動場の性質を論じることには限界がある. 本論文では最急降下法³⁾を用いて, 点加振解を評価し, 地中深部へ伝わる実体波の特性を検討する.

2 解析手法の概要

2.1 変位場の波数積分表示

3 次元の半無限弾性波動場の地表面を鉛直方向に加振した場合, 変位場は次式で表現される.

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{q}{\mu\sqrt{8\pi^3r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} [I_{zL} + I_{zT}] \\ u_r &= \frac{q}{\mu\sqrt{8\pi^3r}} e^{i\frac{\pi}{4}} [I_{rL} + I_{rT}] \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに, $\mathbf{u} = (u_z, u_r, u_\theta) \in \mathbb{R}_+^3$ は円筒座標系における変位場, q は加振力, λ, μ は波動場の Lamé 定数である. また, I は波数積分でそれぞれ次式で表せる.

$$\begin{aligned} I_{zL} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} \frac{-\gamma(\nu^2 + k^2)}{F(k)} e^{ikr - \gamma z} dk \\ I_{zT} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} \frac{2k^2\gamma}{F(k)} e^{ikr - \nu z} dk \\ I_{rL} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} \frac{k(\nu^2 + k^2)}{F(k)} e^{ikr - \gamma z} dk \\ I_{rT} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k} \frac{-2k\gamma\nu}{F(k)} e^{ikr - \nu z} dk \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, k は波数, $\gamma = \sqrt{k^2 - k_L^2}$, $\nu = \sqrt{k^2 - k_T^2}$ である. 各変数に用いられている添字の L, T はそれぞれ P

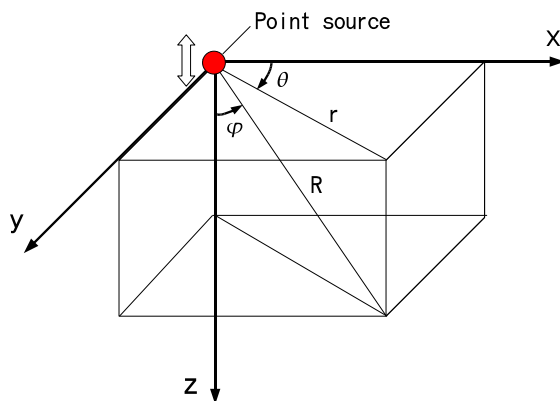


図-1: 座標系及び鉛直角の定義

波, S 波に関するものであることを示す. また, $F(k)$ は Rayleigh 関数であり次式で表せる.

$$F(k) = (\nu^2 + k^2)^2 - 4k^2\gamma\nu \quad (3)$$

2.2 最急降下法による点加振解の評価

式(2)の波数積分に対して最急降下法を適用すると, 変位場は次式のように表せる.

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{q}{2\pi\mu R} [S_{zL} e^{-ik_L R} + S_{zT} e^{-ik_T R}] \\ u_r &= -\frac{q}{2\pi\mu R} [S_{rL} e^{-ik_L R} + S_{rT} e^{-ik_T R}] \\ u_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ である. また, S は,

$$\begin{aligned} S_{zL} &= \frac{-\cos^2 \varphi (2 \sin^2 \varphi - h^2)}{F_L} \\ S_{zT} &= \frac{2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{h^2 - \sin^2 \varphi}}{F_T} \\ S_{rL} &= \frac{-\sin \varphi \cos \varphi (2 \sin^2 \varphi - h^2)}{F_L} \\ S_{rT} &= \frac{-2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{h^2 - \sin^2 \varphi}}{F_T} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, $\varphi = \tan^{-1}(r/z)$ は鉛直角 (vertical angle), $h = c_T/c_L$ は波速の比である. φ と R は図-1 に示すように定

キーワード: Lamb の問題, 波数積分, 最急降下法, 実体波, 半無限弾性波動場, Green 関数

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4063)

義している．また， F_L ， F_T は，

$$F_L = (2 \sin^2 \varphi - h^{-2})^2 + 4 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{h^{-2} - \sin^2 \varphi}$$

$$F_T = (2 \sin^2 \varphi - 1)^2 + 4 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sqrt{h^2 - \sin^2 \varphi} \quad (6)$$

3 数値計算結果

地表面に鉛直方向の点加振を加えた場合の変位の振幅分布を図-2に示す．この図は鉛直断面の結果であり，計算には一般化 Fourier 変換⁴⁾を用いた．波動場の Lamé 定数は， $\lambda = 0.5$ GPa， $\mu = 1.0$ GPa，質量密度は 2.0×10^3 kg/m³ とする．また，加振振動数は 1.0 Hz，加振力の大きさは $q = 1.0 \times 10^7$ kN とする．ここからも分かるように，変位振幅は自由表面に沿った部分と鉛直方向からある角度を有する領域で高い値を示している．

特に，地中方向のある領域で変位振幅が高くなる現象が最急降下法で再現できるかどうかを検討してみる．図-3に最急降下法で得られた変位振幅と，一般化 Fourier 変換及び Hankel 変換で計算した変位振幅を比較した結果を示す．横軸は図-1に示すような鉛直角 φ をとり，縦軸に変位振幅をとっている．地表面原点からの距離 $R = 5$ km とする．最急降下法による解と Hankel 変換による解の傾向は， $35^\circ < \varphi < 45^\circ$ の領域と $\varphi > 80^\circ$ の領域を除いて，概ね良好に一致している．前者の領域は，式 (5)，式 (6) において， $\sqrt{h^2 - \sin^2 \varphi} \simeq 0$ となる領域で，S 波に関する成分が限りなく小さくなることで，最急降下法による解の変動が激しくなっている．後者の領域は，表面波の領域であり，最急降下法による近似は限界があることを示している．一般化 Fourier 変換による解は，Hankel 変換による解と同様な曲線を描いている一方で，変位振幅は小さくなっている．これは，一般化 Fourier 変換による手法の波数積分間隔及び空間解像度が粗いこと，また，Hankel 変換による手法は Cauchy の主値と留数に分離する方法をとっているため，減衰因子を考慮していないことの 2 点が考えられる．

図-3 の最急降下法の結果によれば， $\varphi = 40^\circ$ 付近で変位振幅はピークを示しており，一般化 Fourier 変換や Hankel 変換による変位振幅のピーク $40^\circ < \varphi < 50^\circ$ と，概ね一致している．即ち，最急降下法で変位振幅が高くなる地中深部の領域を求めることが可能である．

4 むすび

本論文では，最急降下法を用いた点加振で生じる地中深部へ伝わる実体波の伝播特性の検討と題し，最急降下法を用いて点加振解を評価し，地中深部へ伝わる実体波の特性を検討した．変位振幅の値が大きい領域のうち，地中方向のある領域で変位振幅が大きくなる現象を，最急降下法によって検討を試みた．最急降下法によれば，変位振幅の高い領域は従来の手法と概ね一致しており，地中方向へ伝わる実体波が指向性を持って伝播することが確認できた．

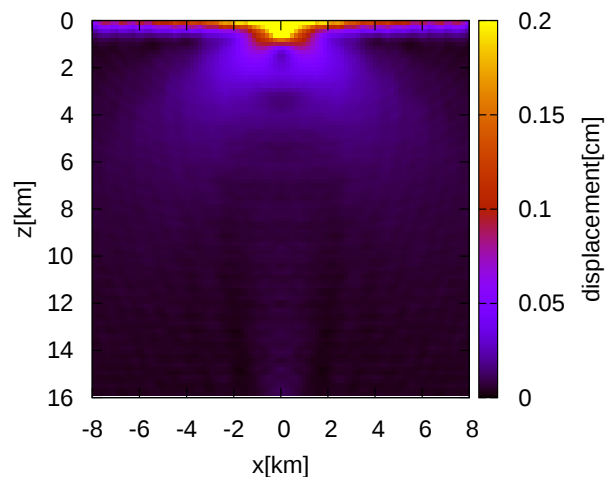


図-2: 変位の振幅分布図 ($y = 0$ km)

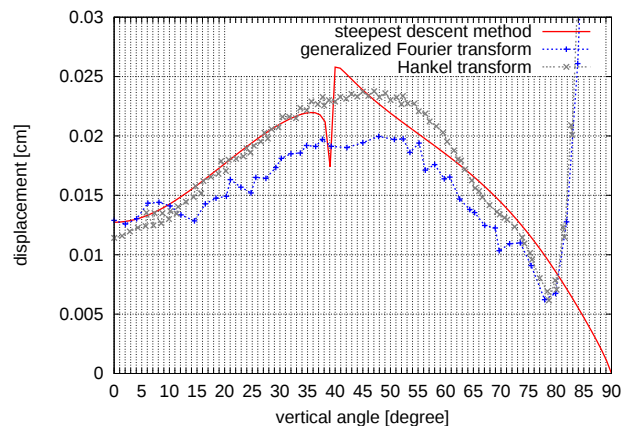


図-3: 変位振幅の比較図 ($R = 5$ km)

今後の課題は，地表面点加振によって生じる実体波の伝播特性を活かして，地中深部の媒質の変動領域へ照射する効果的な波動の策定を検討することである．

5 参考文献

- 1) Lamb, H.: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A203, pp. 1-42, 1904
- 2) 川崎一朗: 特集: Lamb の問題 100 年の歩み, 地震, 第 2 輯, 第 57 巻, 315-316 頁, 2005.
- 3) Aki, K. and Richards, P. G.: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Berlin, Springer, 1998.
- 4) Touhei, T.: Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 52-73, 2009.