

変分原理による不連続ガラキン法の力学問題における基礎的特性

北海道大学工学研究科	正会員	○齋藤 主樹
北海道大学工学研究科	正会員	蟹江 俊仁
北海道大学工学研究科	正会員	佐藤 太裕
大成建設(株)	正会員	鈴木 俊一

1. 研究目的とその背景

不連続ガラキン有限要素法(DGFEM)とは、一般的な有限要素法(FEM)に比べ、各要素間の不連続性を許容する事により、要素境界において目的変数とその微分値に不連続な解析値を与える手法である。よって、DGFEM は複雑な幾何形状に対する柔軟性と、物性値の不連続性が卓越する条件下での高い解析精度を有する手法であると考えられており、国内では鈴木ら¹⁾により、非定常移流拡散方程式への適用がなされ、透水係数等の物性値の不連続性が卓越するような条件下においても、精度の高い解を得られる事が実証された。しかし、当手法の基礎的原理・特性に関しては、研究事例が少なく、明らかにされていない部分が多い。

そこで本研究では、変分原理に基づき、拡散項を含む基礎的な問題に対して定式化を行い、ラグランジュ乗数の設定、不連続値の評価・制御について述べる。当手法の適用事例としては、一次元における張力と荷重を与えられた弾性床の弦のたわみ問題を扱い、解析値の特徴について比較・検討を行う。

2. 変分原理による DGFEM の定式化

張力 T 、荷重 w が与えられた弾性係数 k の床の弦のたわみ ϕ に関するエネルギー汎関数は、非退化形式で以下のように記述できる。(図1参照)

$$\Pi(\phi) = \int_{\Omega} \left[\frac{T}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{k}{2} \phi^2 - w\phi \right] d\Omega \quad (1)$$

二要素からなる系の場合、以下の汎関数の第一変分をゼロとする事で、各領域での有限要素式が得られる。

$$\Pi(\phi) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \left[\frac{T}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{k}{2} \phi_i^2 - w\phi_i \right] d\Omega \quad (2)$$

一般的な FEM では各領域での有限要素式を重ね合わせて、全体行列を導出し、要素境界で一つの解析値

を得る事ができる。

一方、DGFEM では要素毎に境界値を定義し、要素間での連続性に関して付帯条件を与えることが大きな特徴である。二要素からなる系を考え、要素境界でラグランジュ乗数 λ を導入し、連続性に関しての付帯条件を与えた場合、汎関数は以下のように記述できる。

$$\Pi[\phi] = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \left[\frac{T}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{k}{2} \phi_i^2 - w\phi_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{int}} \lambda (\phi_1 - \phi_2) d\Gamma \quad (3)$$

Γ_{int} は二要素間の接触境界である。 Γ_{int} に関する境界積分項が、 Γ_{int} での境界値の連続性に関する制約条件となる。式(3)の第一変分をゼロとする事で、以下の式(4)～式(6)が得られる。

$$-T\nabla^2 \phi_i + k\phi_i - w = 0 \text{ in } \Omega_i \quad (i=1,2) \quad (4)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \text{ on } \Gamma_{int} \quad (5)$$

$$T\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \lambda = 0, T\nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_2 - \lambda = 0 \text{ on } \Gamma_{int} \quad (6)$$

式(5)、式(6)はそれぞれ Γ_{int} でのたわみとたわみ角の連続性に関する制約条件である。ここで式(6)より、ラグランジュ乗数 λ を二領域の変数 $\nabla \phi_1, \nabla \phi_2$ とパラメータ θ_1, θ_2 により次のように表現する場合を考える。

$$\lambda = T\theta_1 (\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_1) + T\theta_2 (\nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_2) \quad (7)$$

式(7)を式(6)の二つの式に代入し θ_i を消去することで、ラグランジュ乗数を単一の変数 θ を用いて以下のように記述できる。

$$\lambda = T(\theta-1)(\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_1) + T\theta(\nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_2) \quad (8)$$

$$(i) \lambda = -T(\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_1) \quad [\theta=0] \quad (9)$$

$$(ii) \lambda = +T(\nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_2) \quad [\theta=1] \quad (10)$$

$$(iii) \lambda = 0.5T(-\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_2) \quad [\theta=0.5] \quad (11)$$

以上のように、 θ に任意の値を与えてラグランジュ乗数を定義し、式(2)の汎関数の第一変分をゼロとする事で、境界で二つの不連続な解析値が得られる。また、 θ の与え方により、 x 軸に沿って移流を伴うような問題でいえば風上側($\theta=0$)、または風下側($\theta=1$)に重み付

キーワード DGFEM 変分原理 ラグランジュ乗数 ペナルティ関数法

連絡先 〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目 北海道大学大学院工学研究科 TEL 011-706-6176

けをして解析が行える．なお， $\theta=0.5$ の場合は風上，風下に等価な重みづけが行える．実際の解析では，全ての境界に対して任意の θ を用いてラグランジュ乗数を定義し，汎関数の第一変分をゼロとする事で，それぞれの領域での DGFEM による有限要素式が得られる．

3. 解析モデルと解析結果

本研究の解析モデルを図 1 に示す．両端部で $\phi=0$ とし，要素数は 9 要素(図 2 参照)を基準に 2 倍，4 倍と要素数を増やし，9 要素,18 要素,36 要素で解析を行った．一次の形状関数を用いて， $\theta=0.5$ と設定した場合の解析結果を図 3 に示す． ϕ 軸に対称な解析結果が得られていることから，風上側と風下側で等価な重み付けがなされている事がわかる．また，境界での不連続値の差は，要素数の増加に伴い小さくなり，理論解へと収束している事がわかる．ここで，境界での不連続値をどう評価・制御するかが問題となる．

4. ペナルティ関数法による不連続値の評価と制御

Zienkiewicz²⁾は，汎関数に下記の安定化項を付加し，ペナルティ関数法により不連続性を制御する手法を提案している．

$$\Pi_s[\phi] = \int_{\Gamma_{int}} \frac{\tau}{2} (\phi_1 - \phi_2)^2 d\Gamma \quad (12)$$

ここで， τ はペナルティ係数の役割を果たす安定化パラメータであり， τ の値を大きく設定する事で，要素間の不連続値が制御できる． $\tau \cong 50T/h$ として解析を行った結果が図 4 である．全ての境界で不連続値が制御され，理論解にはほぼ一致している．なお，本解析手法は，一般的な FEM と比較して遜色ない解析精度であることがわかっている．

5. まとめと今後の課題

本研究では変分原理に着目し，拡散項を含む問題に対して DGFEM の定式化を行い，その解析値の妥当性や特徴について基礎的な検討を行った．結果，DGFEM の大きな特徴である境界での不連続な解析値が確認でき，それらの不連続値はペナルティ関数法により制御可能な事がわかった．しかし，不連続値を制御する事で，要素毎の力のつりあいが損なわれる事も明らかになっており，不連続値の制御とペナルティ数のバランスに関しては，今後，更なる検討が必要である．

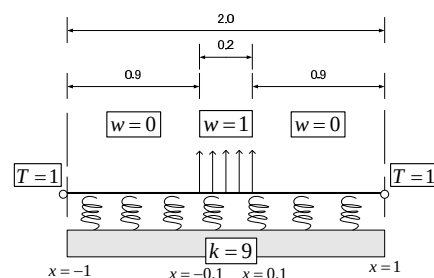


図1. 解析モデル

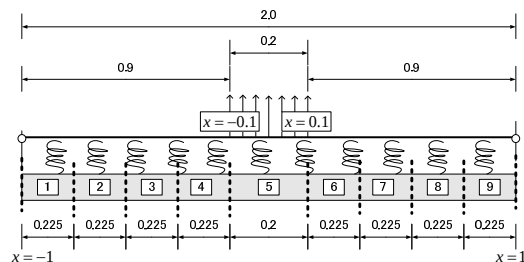


図2. 要素分割 (9 要素の場合)

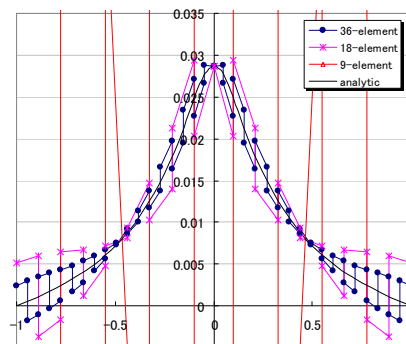


図3. 非退化形式 $x-\phi$ 図 ($\tau=0$)

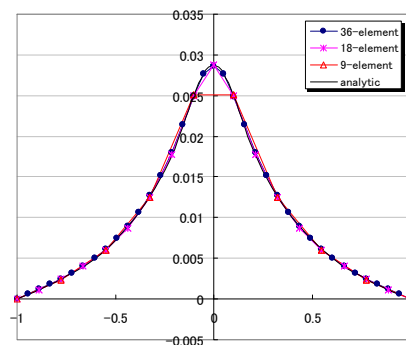


図4. 非退化形式 $x-\phi$ 図 ($\tau \cong 50T/h$)

6. 参考文献

- 1) 鈴木俊一，本島貴之，苗村由美，久保紳，蟹江俊仁：局所不連続ガラーキン有限要素法による放射性廃棄物処分施設を対象とした地下水流動・核種移行解析の高度化，土木学会論文集C，Vol.65(2009)，No.3，pp703-705
- 2) O.C.Zienkiewicz et al. : On Discontinuous Galerkin Methods, International Journal for numerical methods in engineering (2003)