

境界要素法を用いた異方性弾性体における3次元波動散乱解析

東京工業大学 学生会員 ○田中遊雲
 東京工業大学 正会員 斎藤隆泰
 東京工業大学 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

異方性材料に対する超音波非破壊検査では、材料のもつ音響異方性が、高精度な検査を妨げる要因となっている。そこで本研究では、異方性弾性体中における超音波の理論的な伝播特性を把握するために、異方性動弾性問題における周波数域での3次元境界要素法を開発する。以下では、座標は直交座標系 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を用い、特に断りの無い限り、式には総和規約を適用する。

2. 異方性弾性体の基礎式

フックの法則に従う3次元異方性弾性体の周波数域のChristoffel方程式は次のように与えられる。

$$(\Gamma_{ip} - \rho c^2 \delta_{ik}) u_p = 0, \Gamma_{ip}(\mathbf{n}) = c_{ijpq} n_j n_q \quad (1)$$

ここで、 u_p は変位、 ρ は密度、 c は波速、 c_{ijpq} は弾性定数、 n_j は波の進行方向ベクトルの成分、 δ_{ij} はクロネッカーデルタである。 Γ_{ip} はChristoffelテンソルと呼ばれ、式(1)左の方程式は固有空間 Γ_{ip} における固有値 $\lambda_m = \rho c_m^2$ 、固有ベクトル E_{pm} に関する固有値問題 $\Gamma_{ip}(\mathbf{n}) E_{pm} = \lambda_m E_{im}$ へ帰着される。以下では、WangとAchenbachによるラドン変換¹⁾により導かれた周波数領域のグリーン関数を用いた境界要素法の定式化を行う。

3. 境界要素法の定式化

境界要素法は、支配微分方程式と等価な積分表現を導き、境界上及び領域内での積分方程式を離散化して得られる連立方程式を解くことで、境界上及び領域内の数値解を求める手法である。以下では、周波数域での外部散乱問題(図-1参照)における定式化を示す。

(1) 境界積分方程式

散乱問題における全変位の境界積分方程式は、周波数領域において、次式で表される。

$$c_{ik} u_k(\mathbf{x}) = u_i^{in}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} g_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) d\Gamma - p.v. \int_{\Gamma} h_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{y}) d\Gamma \quad (2)$$

ただし c_{ik} は自由項であり²⁾、右辺第三項の $p.v.$ はコーシーの主値積分を示す。また u_i^{in} は入射波、 g_{ik}, h_{ik} は後に説明する3次元異方性動弾性問題における基本解である。式(2)は境界 Γ を M 個の一定要素に分割し、離散化して解く。空洞による散乱問題では、境界 Γ における表面力がゼロであるので、結局、式(2)は、

$$c_{ik} u_k^N = u_i^{in} - \sum_M H_{ik}^{NM} u_k^M \quad (3)$$

$$H_{ik}^{NM} = \int_{\Gamma_M} h_{ik}^{NM} d\Gamma_M$$

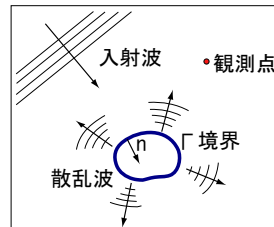


図-1 散乱問題の概念図

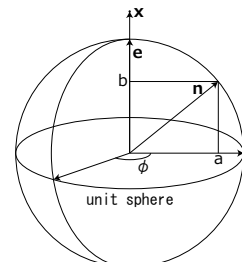


図-2 変数変換の関係

と書ける。ここで N は観測点番号、 M はソース点番号である。入射波 u_i^{in} が与えられれば、境界上及び任意の点における変位を得ることができる。

(2) グリーン関数の評価

異方性動弾性問題では、積分核となる二重層核 h_{ik} は等方性動弾性問題と同様、静的部分 h_{ik}^S と動的部分 h_{ik}^R に分離でき、球面積分の形で次式のように与えられている。

$$h_{ik} = h_{ik}^S + h_{ik}^R \quad (4)$$

$$h_{ik}^S = \frac{c_{ijpq} n_j \partial_q}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{pk}^{-1}(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{n}$$

$$h_{ik}^R = \frac{ic_{ijpq} n_j \partial_q}{4\pi^2} \int_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} > 0}} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m^2 E_{pm} E_{km}}{2\rho c_m^2} e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} d\mathbf{n}$$

ここで ω は周波数、 $k_m = \omega / \sqrt{\lambda_m / \rho}$ 、 δ はデルタ関数である。

式(4)を数値的に評価する為に、 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{x}$ について変数変換¹⁾(図-2)を行うと、 b 及び ϕ による2重積分の形になる。これを離散化し、台形公式とガウス数値積分公式を用いて積分すれば、

$$h_{ik}^S = \frac{-c_{ijpq} n_j}{8\pi^2 r^2} \sum_{i=1}^I \alpha (f^S(\phi_i) + f^S(\phi_{i-1}))$$

$$h_{ik}^R = \frac{-c_{ijpq}}{8\pi^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha \omega_j (f^R(\phi_i, b_j) + f^R(\phi_{i-1}, b_j))$$

$$f^S(\phi) = \partial_l \Gamma_{pk}^{-1}(\phi) e_l d_q + \Gamma_{pk}^{-1}(\phi) e_q$$

$$f^R(\phi, b) = \sum_{m=1}^3 \frac{n(\phi)_q k_m(\phi, b)^2 E_{pm}(\phi, b) E_{km}(\phi, b)}{2\rho c_m^2(\phi, b)} e^{ik_m(\phi, b) |rb|}$$

となる。ただし、 α は π/I 、 ω_j, b_j はガウス数値積分の重み係数と積分点の座標値、 ϕ_i は $2\pi/I$ である。

(3) 特異積分の評価

h_{ik}^S は $r = 0$ のとき特異性を示す。ここでは境界要素が三角形のときの特異積分の評価方法について述べる。今、図-3右のように三角形の重心を原点に取り、 $\int_{\Gamma} h_{ik}^S d\Gamma$ を極座標形式で積分すると次のように書ける。

キーワード：3次元境界要素法、異方性、グリーン関数

連絡先：〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22 TEL/FAX 03-5734-2692

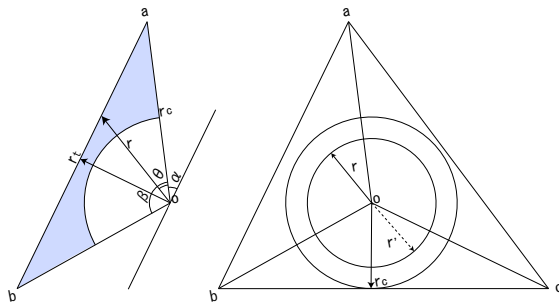


図-3 領域の三角形要素

$$\int_{\Gamma} h_{ik}^S d\Gamma = \int_{\theta} \int_r \frac{-c_{ijpq} n_j}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (\partial_l \Gamma_{pk}^{-1} e_l d_q + \Gamma_{pk}^{-1} e_q) d\phi dr d\theta \quad (5)$$

ところで、図-3 右における位置ベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ での h_{ik}^S の値は、絶対値が等しく、また正負が逆となる。そのため、半径 r_c の円の内側部分の積分は打ち消され、ゼロとなる。これより、三角形要素を頂点と重心を結んだ線分で3分割して得られる $\triangle oab, \triangle obc, \triangle oca$ について、図-3 左のように三角形から扇形を引いた部分をそれぞれ積分することで、特異積分を計算することができる。 $\triangle oab$ 分の計算例を以下に示す。図-3 左から、線分 $a-b$ 上に微小要素がある場合は幾何学的に $r = \frac{r_t}{\sin(\theta + \alpha)}$ と求まるので、式 (5) の右辺は次のように計算される。

$$\int_0^{\beta} \log \left(\frac{r_t}{r_c \cdot \sin(\theta + \alpha)} \right) \frac{-c_{ijpq} n_j}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} (\partial_l \Gamma_{pk}^{-1} e_l d_q + \Gamma_{pk}^{-1} e_q) d\phi d\theta \quad (6)$$

4. 数値解析例

以下に、原点中心、半径 a の空洞による入射波の散乱問題を解析した結果を示す。空洞は要素数 800 の一定要素で離散化し、入射波については、進行方向 $\mathbf{p} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ の縦波平面波を用いる。

(1) 精度の確認

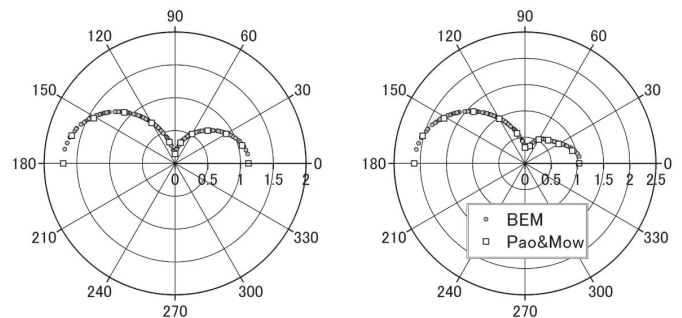
等方性材料中の球状空洞による散乱問題の解は、Pao と Mow による解析解³⁾ が有名である。これと本解析プログラムに等方性弾性定数を代入して得られる解とを比較したものを、図-4 に示す。平面波の進行方向ベクトル $\mathbf{p}$ と球面上の点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ がなす角を θ とし、 $\mathbf{r}$ 方向の変位の振幅 $|u_r|$ と入射波の振幅 u_0 の比を θ ごとにプロットしている。図のように、両者はよく一致している。

(2) 異方性材料における波動散乱解析

次に、材料モデルとして、等方弾性体 (ポアソン比:0.25)、グラファイトエポキシ⁴⁾ (弾性定数を図-5 に示す) を用いた場合の空洞周辺の変位場を解析した。図-6-図-7 に材料および波数 ak_L ごとに、 $x_2 = 0$ 平面における変位の絶対値 $|u|$ と u_0 の比をプロットした結果を示す。グラファイトエポキシでは、異方性の影響で入射波の衝突前面ではなく、空洞の左面で変位が大きくなっている様子が見られる。

5. おわりに

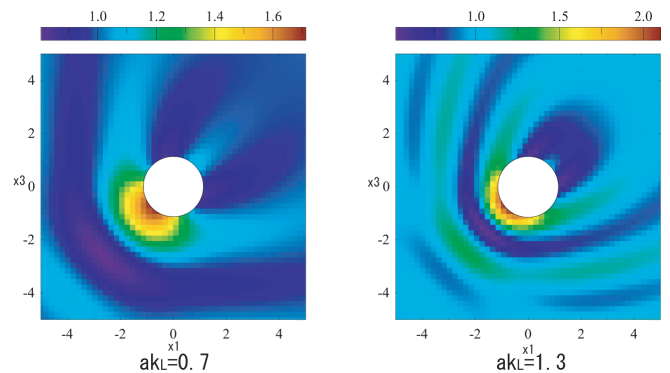
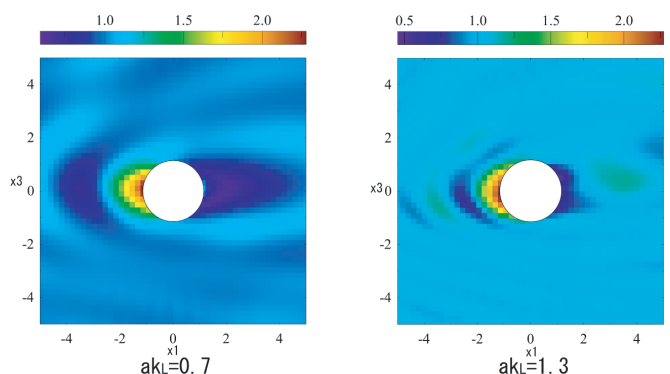
3次元異方性弾性波動問題における周波数域の境界要素法を開発した。ただし、異方性材料におけるグリーン関数の球面積分が、波数の変化によって複雑になり、収束させるために多くの時間を費やす必要があった。今後の課題として、計算時間の短縮および時間域への拡張が挙げられる。

図-4 $|u_r|/u_0$, BEM による解と Pao & Mow による解析解の比較

$$C_{ij}^{\text{graphite-epoxy}} = \begin{pmatrix} 95.5 & 28.9 & 4.03 & 0 & 0 & 44.7 \\ & 25.9 & 4.65 & 0 & 0 & 15.6 \\ & & 16.3 & 0 & 0 & 0.54 \\ & & & 4.40 & -1.78 & 0 \\ & & & & 6.45 & 0 \\ Sym & & & & & 32.7 \end{pmatrix} \quad (\text{GPa})$$

$$\rho_{\text{graphite-epoxy}} = 1600 \quad (\text{kg/m}^3)$$

図-5 材料モデルの弾性定数

図-6 $|u|/u_0$, 等方性 (isotropic)図-7 $|u|/u_0$, グラファイトエポキシ (monoclinic)

参考文献

- 1) C.-Y. Wang, and J.D.Achenbach : Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids, Proc. R. Soc. Lond. A, The Royal Society, 449, pp.441-458, 1995.
- 2) 小林昭一編著 : 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- 3) 境界要素法研究会 : 境界要素法の応用, コロナ社, 1987.
- 4) L.Gaul, M.Kögl and M.Wagner : Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.