

水平多層地盤を鉛直に伝播する波に関する保存量

京都大学防災研究所	正会員	○ 後藤 浩之
(株) ニュージェック	正会員	平井 俊之
京都大学防災研究所	正会員	澤田 純男

1. はじめに

連続体が動的に変形する場合, エネルギー, 運動量などの基本的な物理量は対象とする領域内で保存されることが古くから知られている¹⁾. 全無限媒質においてエネルギーがあるソースから放射される場合, 波のエネルギーはソースを取り囲むようにして設定した表面に関する面積分値として定義することができ, 面の取り方に依らずその値は一定である. また, 波線の束として定義される ray tube の概念を導入することで, ray tube の断面に対して定義されるエネルギーが ray tube 内に捕捉されるため, その断面に対するエネルギー保存則も一般に成り立つ. 伝播する波が平面波であるとする, ray tube の断面に対する単位面積あたりの波のエネルギーは媒質のインピーダンスと粒子速度の2乗を掛けたものを時間積分したものとなる.

ところが, 波の伝播経路上に媒質境界が存在する場合, 入射するエネルギーは境界面で反射波のエネルギーと透過波のエネルギーとに分離される. このため, 媒質の一方で観測される波で定義されるエネルギーと, もう一方で観測される波で定義されるエネルギーは一般に等しくならない. この事実は, 水平多層地盤の各層で観測される波を直接用いてエネルギーを定義した場合にそのエネルギーが保存されないことを意味し, 既往の研究においても見られる現象である²⁾.

本研究では, 水平多層地盤を伝播する波に対してエネルギーに代替する物理量を新たに定義し, その性質を調べた.

2. 水平多層地盤内で保存される物理量

図1に示すように, 第1層から第 n 層までの n 層と半無限の基盤0からなる水平多層地盤を考える. ここに, 第 k 層の密度を ρ_k , S波速度を β_k , 層厚 h_k , 基盤の密度を ρ_0 , S波速度を β_0 とする. 本研究ではまず, 最下層から入射する波の振幅と各層の上昇波の振幅との比, すなわち地表であれば地盤の伝達関数の半分, の絶対値の2乗を周波数領域で平均を取った値に着目する. 第 k 層に対して具体的に記述すると以下のように表すことができる.

$$\langle P_k \rangle = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \left| \frac{A_k(\omega)}{A_0(\omega)} \right|^2 d\omega \quad \dots \quad (1)$$

ここに, $A_k(\omega)$ は第 k 層の上昇波の複素振幅, $A_0(\omega)$ は基盤に入射する波の複素振幅を表す.

表層1層と基盤とからなる2層地盤モデルに対して具体的に $\langle P_k \rangle$ を記述すると以下のように表すことができる.

$$\langle P_1 \rangle = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \frac{1}{\cos^2(\omega h_1/\beta_1) + R_{1,0}^2 \sin^2(\omega h_1/\beta_1)} d\omega, \quad \langle P_0 \rangle = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} d\omega \quad \dots \quad (2)$$

ここに, $R_{1,0}$ はインピーダンス比 ($= \rho_1 \beta_1 / \rho_0 \beta_0$) を表す. $\langle P_1 \rangle$ の被積分関数が ω に対して $\pi h_1 / \beta_1$ の周期性を有することに着目すると, 平均操作を施した積分値を解析的に求めることが可能で, それぞれ以下のように値が得られる.

$$\langle P_1 \rangle = \frac{1}{R_{1,0}} = \frac{\rho_0 \beta_0}{\rho_1 \beta_1}, \quad \langle P_0 \rangle = 1 \quad \dots \quad (3)$$

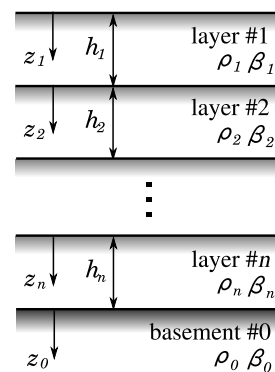


図1: 水平多層地盤のモデル

従って、2層地盤モデルでは

$$\rho_0 \beta_0 \langle P_0 \rangle = \rho_1 \beta_1 \langle P_1 \rangle \dots\dots\dots (4)$$

が成立することが証明できる．式(4)の左辺，および右辺は基盤と表層のそれぞれで定義される物理量で記述されているので， $\rho \beta \langle P \rangle$ という物理量が層に依らず一定であることを表している．

また，多層地盤モデルに対して $\langle P_k \rangle$ は以下のように表すことができる．

$$\langle P_k \rangle = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} \frac{(Re[\alpha_{k-1} C_{k-2}])^2 + R_{k-1,k}^2 (Im[\alpha_{k-1} C_{k-2}])^2}{(Re[\alpha_n C_{n-1}])^2 + R_{n,0}^2 (Im[\alpha_n C_{n-1}])^2} d\omega \dots\dots\dots (5)$$

ここに， $\alpha_k = e^{i\omega h_k / \beta_k}$ ， $R_{k,l}$ はインピーダンス比 ($= \rho_k \beta_k / \rho_l \beta_l$) を表し， C_k は地盤物性などを反映して帰納的に与えられる複素係数である．式(5)で与えられる $\langle P_k \rangle$ は一般に解析積分で評価できないため，多層地盤モデルに対して $\rho \beta \langle P \rangle$ の性質を直接議論することは難しい．

なお， $\rho \beta \langle P \rangle$ は最下層から入射する波の振幅に対する各層の上昇波の振幅比の絶対値の2乗にインピーダンスを掛けて周波数領域で平均を取った値である．入射波に対する振幅比は，入射波が $|A_0(\omega)| = 1$ である場合，すなわち入射波がインパルスやホワイトノイズである場合の各層の上昇波の振幅に対応する．超関数の議論を避けて形式的に見れば，Wiener-Khinchin の定理から $\langle P \rangle$ は入射波が $|A_0(\omega)| = 1$ である場合に各層で観測される上昇波振幅の2乗を時間積分したものに等しい．すなわち，式(4)の保存則はエネルギー保存則と形式的には類似しており，入射波が $|A_0(\omega)| = 1$ である場合にのみ従来の定義による上昇波のエネルギーが保存されることを示している．

3. Monte Carlo シミュレーションによる検証

多層地盤モデルに対して解析的に議論することができないため，Monte Carlo シミュレーションにより $\rho \beta \langle P \rangle$ の性質を調べる．本研究では，3層地盤モデル，4層地盤モデル，10層地盤モデルに対して，それぞれランダムに500セットのモデルを作成して評価した．各層の材料パラメータ値について，密度は1000-2000kg/m³の範囲，S波速度は10-700m/sの範囲，表層の全層厚は1-50mの範囲で一様乱数として生成し，表層の各層厚の分布についても一様乱数で決定した．3層地盤モデル，および4層地盤モデルに対して表層第1層と基盤において $\rho \beta \langle P \rangle$ 値を計算して比較を行うと，図2に示すようにモデルに依らず表層第1層の $\rho_1 \beta_1 \langle P_1 \rangle$ 値と $\rho_0 \beta_0 \langle P_0 \rangle$ 値が一致することがわかる．10層地盤モデルについても同様に $\rho_1 \beta_1 \langle P_1 \rangle$ 値と $\rho_0 \beta_0 \langle P_0 \rangle$ 値がほぼ一致することが示される．また，各層の $\rho \beta \langle P \rangle$ 値を計算して層深さについてプロットすると図3のように深さに依らずほぼ一定値を取ることが認められる．

任意の層数を有する水平多層地盤に対して解析的に証明することは今後の課題ではあるが，数値的な検証によると $\rho \beta \langle P \rangle$ は深さに依らずほぼ一定値を取り，工学的な観点では各層で保存されると考えてもさしつかえない．

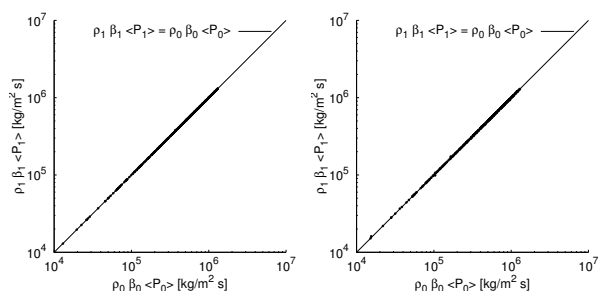


図2：3層地盤モデル（左），4層地盤モデル（右）における表層と基盤の $\rho \beta \langle P \rangle$ 値の比較

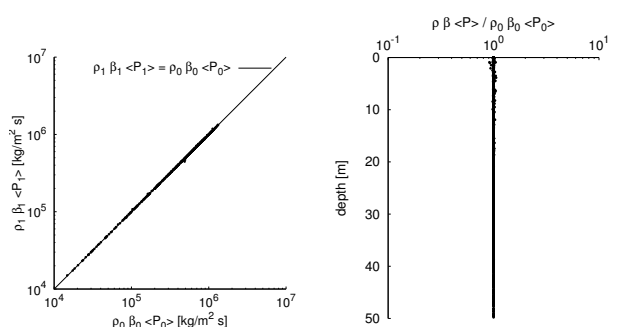


図3：10層モデルにおける表層と基盤の $\rho \beta \langle P \rangle$ 値の比較と深さ分布

参考文献

- 1) Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Pubns, New York, 1927.
- 2) Kokusho, T. and Motoyama, R.: Energy dissipation in surface layer due to vertically propagating SH waves, *J. Geotech. Geoenv. Eng.*, Vol.128, pp.309-318, 2002.