

部材の破壊確率に対する確率分布の影響に関する
マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーションと subset 法を用いた一検討

長崎大学工学部 正 会 員 中村 聖三
長崎大学工学部 学生会員 ○宮田 喜生
長崎大学工学部 フェロー 高橋 和雄

1. まえがき

現在、道路橋の設計には許容応力度法が用いられているが、要求された性能を満たすことを合理的に検証する手段として、信頼性設計の考え方を基礎とする限界状態設計法の導入が求められている。信頼性設計では、部分係数の決定等において信頼性指標 β を用いるが、構造物の諸元や設計変数の確率分布形が異なれば、 β の値が同じでも破壊確率は一般に異なる。破壊確率の算定方法としては、モンテカルロシミュレーションが考えられるが、構造物の破壊確率のように極めて小さい確率の現象を対象とする場合、非常に計算時間がかかるという難点がある。本研究では、引張部材と鋼 I 桁橋を対象に、設計変数の確率分布形を変化させ、subset 法とマルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション(以下、MCMC と記す)を用いて破壊確率を算定することにより、当該部材の破壊確率に対する確率分布形の影響を明らかにする。

2. 破壊確率の算定方法^{1), 2)}

破壊確率の算定方法を以下に簡単に説明する。確率変数の空間内の破壊領域を F とし、破壊確率を $P(F)$ とする。ここで、全体集合を F_0 、その部分集合を $F_i (i=1, 2, \dots, m)$ と表し、 $F_m = F$ とする。

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F \quad (1)$$

破壊確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定できる。

$$P(F) = P(F_m) = P(F_m | F_{m-1}) P(F_{m-1} | F_{m-2}) \dots P(F_1 | F_0) \quad (2)$$

限界状態関数 $z(x)$ 、確率変数ベクトル x の確率密度分布が与えられるとし、破壊状態を $z < 0$ と定義して、破壊確率を算定する。計算手順を以下に示す。

- 1) 確率変数の密度関数に従って、 n_t 個のサンプルを通常のモンテカルロシミュレーションと同様に発生させ、それぞれの限界状態関数の値を求める。部分空間のカウンターを $i=0$ とする。
- 2) 限界状態関数の値を小さい順に並べ、 z_1, z_2, z_3, \dots とする。
 $P(F_{i+1} | F_i) = n_s / n_t$ となる部分空間 F_{i+1} を次式で定義する。

$$F_{i+1} = \{x | z(x) < C_{i+1}\}, \quad C_{i+1} = \frac{z_{n_s} + z_{n_{s+1}}}{2} \quad (3)$$

- 3) MCMC によって、部分空間 F_{i+1} 内に n_t 個のサンプルを発生させる。サンプルの発生方法については文献 1), 2) を参照されたい。
- 4) $z < 0$ となるサンプルの個数 n_f が十分な場合 ($n_f > n_s$) には終了。そうでない場合は $i=i+1$ として手順 2) から繰り返す。

以上の手順により損傷が生じたサンプルが十分得られたら、次式によって破壊確率を求めることができる。

$$P(z < 0) = (n_s / n_t)^i (n_f / n_t) \quad (4)$$

ここで、 n_s は部分空間の大きさを決めるパラメータである。

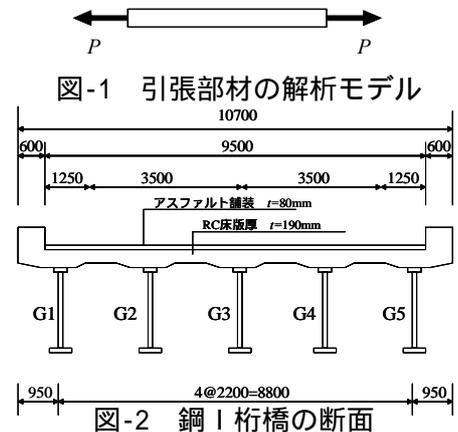
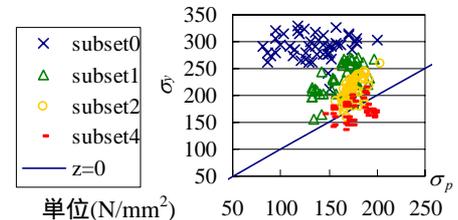


表-1 各確率変数の統計量

		平均	標準偏差
引張部材	σ_y (N/mm ²)	289.5	23.8
	σ_p (N/mm ²)	140.0	21.0
鋼I桁橋	σ_y (kN/m ²)	289500	23800
	W (m ³)	0.02010	0.0002168
	M_s (kN·m)	3519	26.5



キーワード：マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーション, subset 法, 破壊確率, 確率分布

3. 検討概要

ばらつきを考慮する確率変数は正規分布，対数正規分布，あるいはワイブル分布に従うものと仮定した．解析対象は，引張部材と鋼 I 桁橋の 2 つとした．引張部材は，図-1 に示すような軸力 P を受ける SM400 でできた棒部材とし， $P=1000\text{kN}$ に対して許容応力度設計法により断面積 $A=7143\text{mm}^2$ を決定した．作用応力と材料降伏点を確率変数に従うものとし，式(5)に示す限界状態関数 z を用いた．

$$z = \sigma_y - \sigma_p \tag{5}$$

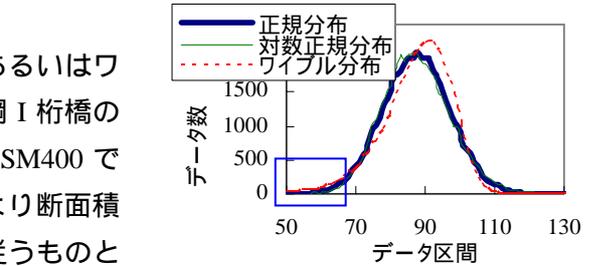
ここで， σ_y は材料降伏点， σ_p は作用応力である．鋼 I 桁橋は，図-2 に示すような断面を持つ支間長 20m の橋梁であり，支間中央部での主桁の引張降伏について解析を行った．着目する主桁は，許容応力の余裕が一番小さくなった G2 とした．作用曲げモーメント M_s ，材料降伏点 σ_y ，断面係数 W を確率変数とし，式(6)に示す限界状態関数を用いた．また，各確率変数の統計量は表-1 のように決定した．

$$z = \sigma_y W - M_s \tag{6}$$

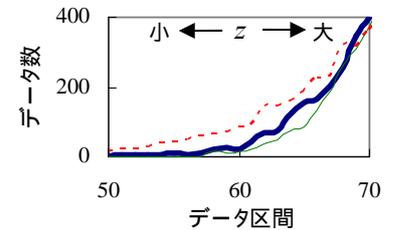
4. 検討結果と考察

本研究の解析方法により，引張部材のサンプル発生状況を図-3 に示す．また，解析によって破壊確率を 50 回求めて算定した平均値，通常のモンテカルロシミュレーションでサンプルを 1,000,000 個発生させ，式(7)で求めた信頼性指標 β ，および式(8)で求めた z が正規分布と仮定した場合の β に対する破壊確率を表-2 に示す．

$$\beta = \bar{z} / \sigma_z \tag{7}$$



a) 限界状態関数のヒストグラム



b) 部分の拡大図

図-4 z のヒストグラム

表-2 破壊確率の比較

引張部材			
	正規分布	対数正規分布	ワイブル分布
信頼性指標 β	4.068	4.067	4.064
式(8)で計算した破壊確率	2.37×10^{-5}	2.38×10^{-5}	2.41×10^{-5}
本研究で得た破壊確率	2.50×10^{-5}	2.63×10^{-4}	1.29×10^{-4}
鋼 I 桁橋			
	正規分布	対数正規分布	ワイブル分布
信頼性指標 β	4.756	4.761	4.752
式(8)で計算した破壊確率	9.89×10^{-7}	9.64×10^{-7}	1.01×10^{-6}
本研究で得た破壊確率	8.60×10^{-7}	5.25×10^{-10}	3.47×10^{-4}

$$p = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \tag{8}$$

引張部材の解析で確率変数を正規分布に従って発生させたとき，理論上破壊確率は 2.33×10^{-5} となればよい．これに対して，本研究での解析結果は 2.50×10^{-5} となっており，概ね理論値と同様の値を得ることができた．また，この場合 z が正規分布となるため，表-2 の式(8)で求めた値も 2.37×10^{-5} とほぼ同様の値となっている．引張部材と鋼 I 桁橋のどちらも確率分布形によって大きく破壊確率が変わっているため，確率分布形の破壊確率に対する影響は非常に大きいことがわかる．一方，信頼性指標は分布形によらず，ほぼ同じ値である．このことから，同じ信頼性指標を確保するように設計したとしても，確率分布形によって破壊確率が大きく異なる可能性があると言える．図-4 に，鋼 I 桁橋の場合の，限界状態関数 z のヒストグラムをそれぞれの確率分布ごとに示す． z が小さい側のヒストグラムの裾野を比較すると，対数正規分布は正規分布より裾野が狭くなっているため破壊確率が小さくなるのに対し，ワイブル分布は正規分布より裾野が広がっているため，破壊確率が大きくなるのが理解できる．

5. まとめ

引張部材のモデルで，正規分布に従って乱数を発生させた場合の破壊確率の結果から，MCMC と subset 法を用いた破壊確率算定法により，概ね理論値と同等の破壊確率が得られることが確認できた．また，破壊確率に対する確率分布形の影響は非常に大きいことがわかった．今後の課題としては，鋼 I 桁橋の引張降伏以外の破壊形式や他形式橋梁の破壊確率に対する確率分布形の影響を検討することなどが挙げられる．

参考文献

- 1) Furuta,H., Miyake,K., Sato,T. and Tsukiyama,I: Reliability Analysis Using Markov-Chain Monte Carlo Simulation, Proceedings of the 9th Korea-Japan Joint Symposium on Steel Bridges, pp.17-28, 2007.8
- 2) 吉田郁政, 佐藤忠信: MCMC を用いた損傷確率算定方法, 土木学会論文集, No794/I-72, pp.43-53, 2005.7