

拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法の計算効率の向上における wavelet のゼロモーメント次数の役割

新潟大学 正会員 紅露一寛
ジェコス 五十嵐和希
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

この20年の間、境界要素法の計算効率の向上に関する研究が国内外で精力的に進められてきており、高速多重展開法がその決定版としての地位を築きつつある。一方、境界要素解析において wavelet を利用する方法も、解析時の計算負荷を軽減する手法として提案されており、主として Laplace 問題¹⁾について有効性が示されてきた。Ravnik ら²⁾は、非圧縮粘性流れの境界要素解析への適用を試みている。著者ら³⁾は、拡散問題の時間域境界積分方程式法における wavelet の適用可能性について論じているが、適用は Haar wavelet に限定されている。そこで本研究では、拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法の計算効率の向上における wavelet のゼロモーメント次数の役割について検討する。

2. Wavelet 基底による関数近似

Wavelet 基底による関数近似を用いることの最大の特徴は、一般的に用いられている関数近似を複数の解像度の下で表現し得る点にある。Wavelet 基底は scaling 関数 ϕ と wavelet ψ の二種類からなり、 $k, k+1$ を階層レベルとし、 $\{\phi_k\}, \{\psi_k\}$ をそれぞれ階層レベル k における scaling 関数と wavelet とすると、 $\{\phi_k\}, \{\psi_k\}$ で表現可能な関数の集合 V_k, W_k は、一階層上の集合 V_{k+1} と次の関係を持つ。

$$V_{k+1} = V_k + W_k = V_0 + \bigcup_{p=0}^k W_p \quad (1)$$

なお、関数近似に必要な基底関数は、一組の ϕ, ψ の拡大、縮小と平行移動によって生成可能である。

$$\phi_{k,j} = \phi(2^k \xi - j), \quad \psi_{k,j} = \psi(2^k \xi - j) \quad (2)$$

また、wavelet ψ は次式で定義される n 次ゼロモーメント性を有している。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^p \psi(\xi) d\xi = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

この性質は、境界要素解析の効率化の鍵となる。

3. 拡散問題の境界要素解析

本研究では、時間域積分方程式を用いた定式化において、空間の離散化に wavelet を適用した場合におけるゼロモー

メント次数の影響について検討する。時間域積分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{y}, t) + k \int_0^t \int_{\Gamma} \left[q^*(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, t) u(\mathbf{x}, \tau) - u^*(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, t) q(\mathbf{x}, \tau) \right] d\Gamma_x d\tau = 0 \quad (4)$$

ここで、 Γ は境界であり、 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ とする。また、 t は現時刻であり、 u の初期条件は領域 Ω 内で 0 となることを仮定している。 u^* は基本解であり、 $q^* = \partial u^* / \partial n$ である。なお、式 (4) の時間積分は、時間軸上で後退方向に区間一定近似して評価する。時刻 $t_L = L\Delta t$ における未知量は $u(\mathbf{x}, t_L) = u^{(L)}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}, t_L) = q^{(L)}(\mathbf{x})$ のいずれかとなる。

4. Wavelet 基底の適用

Wavelet 基底は、式 (4) の Γ 上での u と q の近似、および式 (4) から代数方程式を導出するために用いる。まず、時刻 $t_p (p = 0, 1, \dots, L)$ における $u^{(p)}, q^{(p)}$ を wavelet 基底を用いて次式で近似する。

$$\begin{aligned} u^{(p)} &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_j^{(p)} \phi_j + \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{n(m)} \tilde{u}_{m,j}^{(p)} \psi_{m,j} \\ q^{(p)} &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_j^{(p)} \phi_j + \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{n(m)} \tilde{q}_{m,j}^{(p)} \psi_{m,j} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\hat{u}_j^{(p)}, \hat{q}_j^{(p)}, \tilde{u}_{m,j}^{(p)}, \tilde{q}_{m,j}^{(p)}$ は展開係数、 M は最高階層レベルであり、 $\phi_j, \psi_{m,j}$ は非直交 wavelet¹⁾を用いる。

次に、式 (4) を時間方向に離散化した境界積分方程式に式 (5) を代入し、式 (5) で用いた基底を重みとした Galerkin 法を適用する。その結果、時刻 t_L において解くべき代数方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L^{(L)} \mathbf{u}^{(L)} - \mathbf{G}_L^{(L)} \mathbf{q}^{(L)} \\ = \sum_{p=0}^{L-1} \{ -\mathbf{H}_p^{(L)} \mathbf{u}^{(p)} + \mathbf{G}_p^{(L)} \mathbf{q}^{(p)} \} \end{aligned} \quad (6)$$

なお、式 (6) の係数行列における微小成分を切り捨てることで疎行列を作りだし、計算負荷の軽減を図る。

5. 係数行列成分の切り捨て手法

係数行列成分の切り捨て判定は係数計算の前後二度（事前切り捨て、事後切り捨て）行なう。事前切り捨ては、切

Key Words: 拡散問題, 時間域境界積分方程式法, wavelet, 計算効率

〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7274

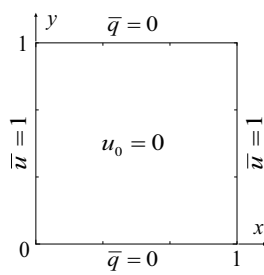
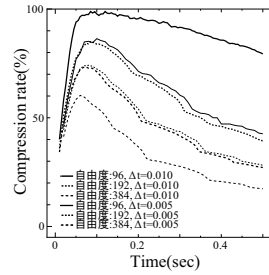
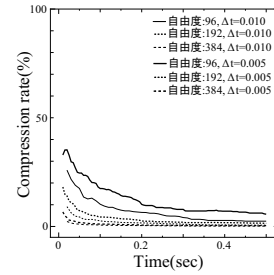


図1 初期条件と境界条件



(a)n=1



(b)n=3

図2 係数行列の圧縮率

表1 係数行列の圧縮率(%) (解析第1ステップ生成成分)

Δt	自由度	圧縮率 ($n=1$)	圧縮率 ($n=3$)
0.010	96	36.719	39.887
0.010	192	33.854	21.929
0.010	384	30.973	10.919
0.005	96	31.684	41.623
0.005	192	27.365	26.752
0.005	384	25.298	14.277

表2 計算時間の比較 [単位:(sec)]

(a)n=1				(b)n=3			
Δt	自由度			Δt	自由度		
0.010	96	87	82	0.010	192	370	30
0.010	192	369	303	0.010	384	1536	44
0.010	384	1509	988	0.010	768	6293	60
0.005	96	174	172	0.005	192	735	99
0.005	192	743	679	0.005	384	3087	131
0.005	384	3049	2468	0.005	768	12596	170

事前切り捨てなし, 事前切り捨てあり

り捨て対象成分の不要な積分計算を回避するために導入する。係数成分の事前評価 $\bar{g}_{ij}^{(L,p)} \approx |g_{ij}^{(L,p)}|$ は、形式的に次式で与えられる。

$$\bar{g}_{ij}^{(L,p)} := \frac{|\beta_i| |\beta_j| \bar{J}_i^{1+n_i} \bar{J}_j^{1+n_j}}{n_i! n_j!} f(k, r_0, L, p, \Delta t) \quad (7)$$

ここで, $|\beta_i|, |\beta_j|$ は wavelet 基底の種類で定める係数, $\bar{J}_i, \bar{J}_j$ は基底のサポートの代表点でのヤコビアン, n_i, n_j は wavelet 基底のゼロモーメント次数である。また, 関数 f は基底関数の種類および時間ステップ p と L によって与えられる関数で, k は拡散係数, r_0 は基底のサポート代表点間距離である。

切り捨て判定条件は、次式で与える。

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}^{(L,p)} &\leq \tau \cdot g_{max} & (\text{事前切り捨て}) \\ |g_{ij}^{(L,p)}| &\leq \tau \cdot g_{max} & (\text{事後切り捨て}) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, g_{max} は $g_{ij}^{(L,p)}$ の参照値, τ は切り捨て基準値である。

6. 解析結果

解析例として、図1に示す初期値境界値問題を考える。解析対象の各辺を3つの scaling 関数で分割後、境界値関数を $\psi^{(1)}$ (Haar wavelet), $\psi^{(3)}$ (3次ゼロモーメント性を有する wavelet) のそれぞれについて式(5)で近似し、3つの自由度と2つの Δt の下で、最適な切り捨て基準値を用いて解析を行った。ここで最適な切り捨て基準値は、切り捨てを行わない場合生じる離散化誤差と比較し、最終ステップまで精度低下を生じない範囲で最大の値とした。解析は0.5(sec)まで行うこととした。表1に第1ステップで生成される係数行列成分の圧縮率(全成分数に対する保存成分数の割合)を示す。最適な切り捨て基準値を用いた場合、自由度96の場

合は $\psi^{(3)}$ を用いた方が係数行列の圧縮効果は低い、自由度192, 384の下では $\psi^{(3)}$ を用いた方が圧縮率が大幅に向上している。特に, $\Delta t=0.010$, 自由度:384のときは, $\psi^{(3)}$ を用いた場合, $\psi^{(1)}$ を用いる場合のおよそ3倍の圧縮性能を示している。

次に、図2に2ステップ目以降、畳み込み積分計算のために新たに追加される係数行列の圧縮率を示す。 $\psi^{(1)}$ を用いる場合に比べ、 $\psi^{(3)}$ を用いる場合、ステップ初期から多数の成分が切り捨てられており、圧縮率が著しく高くなっている。このことから Laplace 問題の場合と同様、解析時の使用メモリの削減に対しては、wavelet のゼロモーメント次数を高く設定することが有効であることが分かる。

次に、表2に各々の離散化、切り捨て条件の下で、解析に要した時間を示す。wavelet BEM では、係数計算の際に基底の区分一定区間領域を分割し、二重の境界積分を計算する必要がある。そのため、 $\psi^{(3)}$ を用いると $\psi^{(1)}$ の場合と比べ、一成分の積分計算に $2^2 = 4$ 倍の計算量を必要とする。しかし、切り捨てを実行することで、 $\psi^{(3)}$ を用いた場合係数行列のスパース性が向上する。そのため、前節で示した事前切り捨てによって不要な積分計算を省略でき、計算時間は大幅に短縮されている。短縮効果はゼロモーメント次数が高いほうが顕著となり、事前切り捨てによって $\psi^{(3)}$ では約1%($\psi^{(1)}$ では約65%)の計算時間まで短縮できた。

参考文献

- 1) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 2) Ravnik, J., Skerget, L., Hribersek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
- 3) 紅露一寛, 石山静香, 阿部和久: 拡散問題を対象とした wavelet 境界要素解析とその有効性, 計算工学講演会論文集, Vol.13, pp.147-150, 2008