

Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の合成関数の積分について

八戸高専 正会員 ○丸岡 晃 八戸高専専攻科 西澤 瞬
富山大学 正会員 奥村 弘

1. はじめに

筆者らは、有限要素法による高精度流体解析のために、移流拡散問題によって、Hermite 型要素を用いた特性有限要素法として、SLG (semi-Lagrange Galerkin) 法¹⁾と、HCG (Hermitian characteristic Galerkin) 法²⁾を提案してきた。特性有限要素法では、定式化に必要な積分に合成関数が含まれるが、一つの要素に対する合成関数が複数の要素にまたがるため、合成関数の含まれる項の積分に対して数値積分を行うなどの近似が必要になる。これに対して HCG 法では、合成関数に対しても Hermite 型要素を構築することによって、合成関数を一つの多項式として近似し、積分計算を簡略化している。これにより高精度でロバストな計算が行えることを示してきたが、これまでに他の積分法との比較を示していない。そこで、本研究では、Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の合成関数の含まれる項の積分について、最も単純な 1 次元純移流問題によって各積分法の検討および Lagrange 要素との比較を行った。

2. 1 次元純移流問題の定式化

スカラー関数 $u(x, t)$ に関する 1 次元純移流問題の特性法による時間離散は、以下ようになる。

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = u^n(X(x)) \\ X(x) = x - a \Delta t \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 a は一定の移流速度である。

Hermite 3 次要素 (以下、H3 要素) を用いれば、要素 $\Omega_e = (x_1, x_2)$ 上の有限要素近似 $u_h|_{\Omega_e}$ は、以下のように表される。

$$u_h|_{\Omega_e} = \mathbf{H}_e(x_\alpha, x)^T \mathbf{U}_e \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_e(x_\alpha, x) = [H_{0\alpha}(x_\alpha, x), H_{x\alpha}(x_\alpha, x)]^T \\ \mathbf{U}_e = [u_\alpha, \frac{\partial u}{\partial x}|_\alpha]^T \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $\alpha = 1, 2$ であり、 $\mathbf{H}_e(x_\alpha, x)$ は以下に示される補間関数、 $\mathbf{U}_e$ は要素端 x_α 上の関数値および導関数値である。

$$\begin{cases} H_{0\alpha}(x_\alpha, x) = [L_1^2(3 - 2L_1), L_2^2(3 - 2L_2)]^T \\ H_{x\alpha}(x_\alpha, x) = [L_1^2 L_2(x_2 - x_1), L_2^2 L_1(x_1 - x_2)]^T \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $L_\alpha (= L_\alpha(x_\alpha, x))$ は長さ座標である。

特性有限要素法による空間離散は、 u_h と同様の近似を用いる重み関数を w_h とすると、以下ようになる。

$$\int_{\Omega} w_h(x) u_h^{n+1}(x) d\Omega = \int_{\Omega} w_h(x) u_h^n(X(x)) d\Omega \quad (5)$$

右辺に合成関数 $u_h^n(X(x))$ が含まれる。

3. 合成関数の含まれる項の積分

本研究では、以下に示す積分法について検討を行う。

(1) Hermite 3 次要素を用いた近似

HCG 法²⁾に従い、 $u_h^n(X(x))|_{\Omega_e}$ を以下のように H3 要素によって近似する。

$$u_h^n(X(x))|_{\Omega_e} \approx \mathbf{H}_e(X_\alpha, X(x))^T \hat{\mathbf{U}}_e^n \quad (6)$$

$$X_\alpha = x_\alpha - a \Delta t, \quad \hat{\mathbf{U}}_e^n = \left[u_h^n(X_\alpha), \frac{\partial u_h^n}{\partial x}(X_\alpha) \right]^T \quad (7)$$

1 次元で a が一定の場合、式 (6) と近似すれば以下の等式が成立するため、連立一次方程式を解く必要がない。

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{H}_e(x_\alpha, x) \mathbf{H}_e(x_\alpha, x)^T d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{H}_e(x_\alpha, x) \mathbf{H}_e(X_\alpha, X(x))^T d\Omega \quad (8)$$

つまり、全体系において以下の式が成立することになり、上流補間によって陽的に解を更新する CIP 法³⁾と一致する。

$$\mathbf{U}^{n+1} = \hat{\mathbf{U}}^n \quad (9)$$

(2) 厳密積分

一つの要素に対する合成関数のまたがっている要素を区分け、その区分ごとで解析的に積分を行えば厳密積分が可能である。多次元では困難であるが、1 次元であれば比較的容易に区分けでき、解析的な積分も可能である。また、その区分ごとに重み関数の基底と合成関数の積が一つの多項式で表されるため、数値積分でも $(2 \times \text{積分点数} - 1)$ 次式の厳密積分を行える Gauss-Legendre の方法を用いれば厳密積分が可能になる。本研究では後者の方法を用いる。なお、3 次要素の場合には、補間関数どうしの積が 6 次式になるため、区分ごとに 4 点積分する必要がある。

(3) 数値積分

要素ごとに積分点を配置し、数値積分を行う。特性有限要素法では最も一般的な方法である。本研究では、Gauss-Legendre の方法を用いる。

4. 数値実験

(1) 計算条件

以下の 1 次元移流拡散問題の厳密解の純移流問題 ($\nu = 0$) の場合を対象とする。

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma + 4\nu t}} \exp\left(-\frac{(x - at - x_c)^2}{\sigma + 4\nu t}\right) \quad (10)$$

ここで、 $x_c = 1$, $\sigma = 0.1$, $a = 1$ とする。

領域 $\Omega = (0, 4)$, 最終時間 $T = 2$, 境界条件 $u(0) = 0$, $u(4) = 0$ とする。

空間離散は分割数を N , 要素長を $h = 4/N$ とした均等分割によって, $N = 32, 64, 128, 256$ と変化させる. 時間離散は Courant 数を c として, $c = 0.1, 0.5, 1.0$ となるように Δt を変化させる.

相対誤差は, 以下の式によって定義する.

$$\text{Relative error} = \frac{\|u_h - u\|_{\ell^2(L_2)}}{\|u\|_{\ell^2(L_2)}} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \|v\|_{\ell^2(L_2)} = (\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|v^n\|_{L_2}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \|v^n\|_{L_2} = (\int_{\Omega} |v^n|^2 d\Omega)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (12)$$

ここで, N_T は総時間ステップ数 ($N_T = T/\Delta t$) である. なお, 厳密解に対して異なる要素どうしの比較ができるように補間作用要素を用いていない. L_2 ノルムの算出には, 厳密性を考慮して 8 点積分を用いる.

(2) 計算結果

図-1 に H3 要素, 図-2 に Lagrange 3 次要素 (以下, L3 要素) による要素長と相対誤差の関係を示す. L3 要素の $c = 0.5$ に 3 点積分のプロットがないが, これは全ての分割数で計算が発散したためである.

$c = 1.0$ の場合, H3 要素による近似および厳密積分では, 節点値が厳密解と一致する. また, 4 点積分以上は厳密解と同様である. ここで示された誤差は, 厳密解に対する補間誤差であり, 言い換えれば, 誤差の下限である.

$c = 0.1, 0.5$ の場合, H3 要素を用いた近似では, 厳密積分より誤差が大きい, ロバストである. 厳密積分では, H3, L3 要素とも誤差が $c = 1.0$ の誤差 (すなわち, 誤差の下限) に近く非常に高精度である. 数値積分では, 発散するケースが散見する. H3 要素と L3 要素の数値積分を比較すると, H3 要素の方がロバストであり, 特に H3 要素の 5 点積分は厳密解と同等の精度である. H3 要素の場合, 関数値が要素境界で C1 連続となるために, 要素ごとに重み関数の基底と合成関数の積を一つの多項式と仮定した数値積分であっても L3 要素より優位な結果が得られたものと考えられる.

5. おわりに

本研究では, 1 次元純移流問題によって H3 要素を用いた特性有限要素法の合成関数の含まれる項の積分について検討した. その結果, 合成関数を H3 要素によって近似する方法では, CIP 法と一致し, 厳密積分より精度は低い, ロバストであることが示された. また, 数値積分を用いた方法では, H3 要素は L3 要素より優位であり, 5 点積分を行えば厳密積分と同等の精度になることが示された.

参考文献

- 1) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, 27, 2008, 143-152.
- 2) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Hermitian Characteristic Galerkin 法, Transactions of JSCES, 20080017.
- 3) 矢部 孝 他編, CIP 法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法 -, 森北出版, 2003.

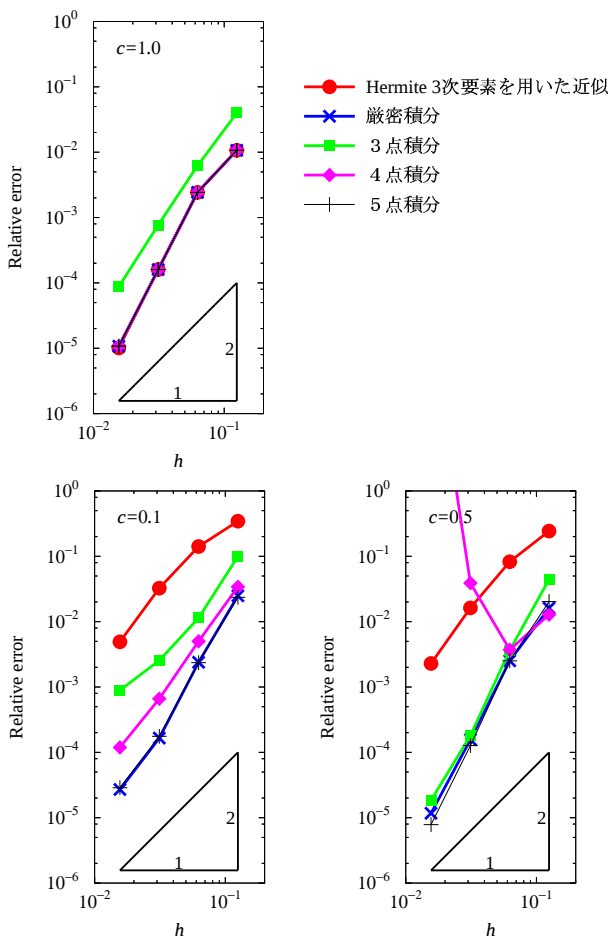


図-1 Hermite 3 次要素 (H3 要素)

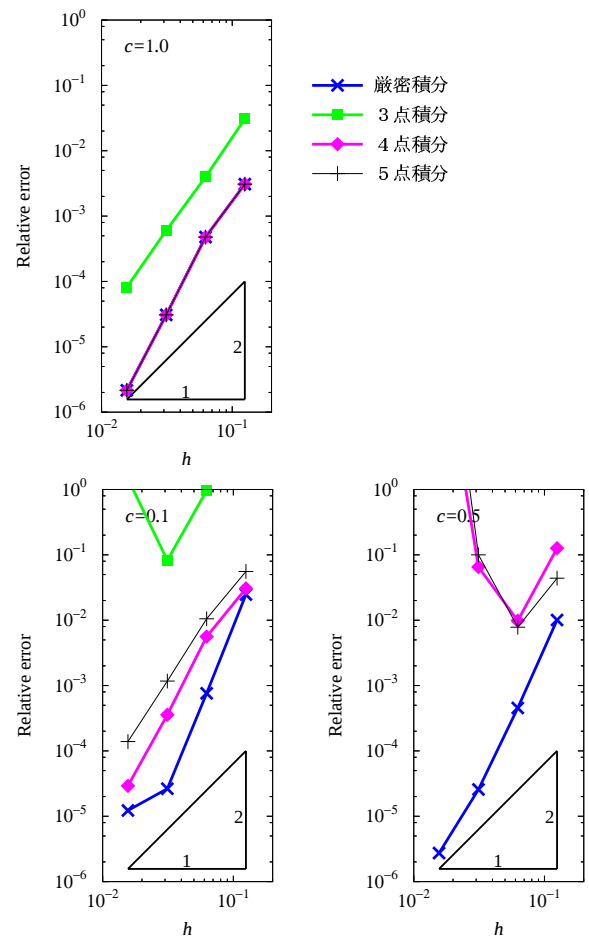


図-2 Lagrange 3 次要素 (L3 要素)