

無限長レールと走行車輪との定常連成応答解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 佐成屋 淳
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

列車走行に伴い発生する軌道振動の動的挙動を把握することは、走行安定性や乗り心地、振動・騒音などに多大な影響を及ぼすため重要である。そのため、軌道の動的問題に関する研究が様々な観点から長年に亘りなされてきた。

軌道振動の主な発生要因は、走行車輪とレールとの接触であり、離散支持された軌道を対象とした連成応答解析は、これまでも有効な手段として用いられてきた。通常は、文献¹⁾の様な有限長モデルを使用するが、打ち切り端からの影響を抑制するために解析領域を十分に長くとる必要があり、高速走行荷重に対する定常応答解を得る際、計算量が莫大になるというデメリットがあった。一方、文献²⁾の解法によれば、Floquet 変換手法を用いることで、無限軌道の定常解を直接得ることが可能となる。しかし、Timoshenko ばりモデルに FEM 解析を適用する際、せん断たわみの存在により移動荷重の適切な評価が困難となるため、当該問題への適用には限界がある。

そこで、本研究においては、Fourier 級数展開をはりの運動方程式に適用する。なお、手法の妥当性を確認することを目的に、Euler ばりを対象とした定式化を用いる。

2. 定式化

図1のような x 軸方向に無限に伸びた周期軌道上を車輪が一定速度 c で走行する定常問題を考える。

レールを Euler ばりによりモデル化すると、はりの運動方程式は次式で与えられる。

$$EIu^{(4)} + k_s u \delta_L(x) + \eta \dot{u} + \rho A \ddot{u} = F(t) \delta(x - ct) \quad (1)$$

ここで、 u はレール変位、 η は減衰係数、 ρA は線密度、 $F(t)$ は車輪との接触力、 $\delta_L(x)$ はレール支持点に特異点をもつ周期 L のデルタ関数である。

定常解 u の t に関する Fourier 変換 $\hat{u}$ は、次式の周期性を満たす。

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x + nL, t + \frac{nL}{c}) e^{-i\omega t} dt \\ t = \tau - \frac{nL}{c} &\rightarrow e^{i\frac{\omega}{c}nL} \int_{-\infty}^{\infty} u(x + nL, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= e^{i\frac{\omega}{c}nL} \hat{u}(x + nL, \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

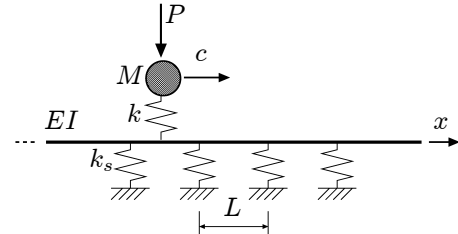


図1 走行荷重下の周期構造

一方、車輪との接触力 F は、周期長 L で律動するものとして考え、 $0 \leq \tilde{x} \leq L$ について次のように表現しておく。

$$F(\frac{\tilde{x}}{c}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2n\pi}{L}\tilde{x}} \quad (3)$$

ここで、 $F_n = 1, F_m = 0, (m \neq n)$ に対する式(1)の Fourier 変換後の解を $\hat{u}_n$ とおく。なお、 $x = \tilde{x} + nL$ である。 $\hat{u}_n$ は式(2)の周期性を有するので、次式の様に与えられる。

$$\hat{u}_n(\tilde{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega) e^{i(\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega}{c})\tilde{x}} \quad (4)$$

式(4)を式(1)の Fourier 変換後の式に代入して a_m^n について解いていくと最終的に次式を得る。

$$a_m^n(\omega) = \frac{1}{cS_m} \left[\delta_{nm} - \frac{1}{S_n} \cdot \frac{1}{\frac{L}{c} + \sum_l \frac{1}{S_l}} \right] \quad (5)$$

ここで、 S_m は次式で定義される。

$$S_m(\omega) := EI \left(\frac{2m\pi}{L} - \frac{\omega}{c} \right)^4 + i\eta\omega - \rho A \omega^2 \quad (6)$$

以上より、式(4)の $\hat{u}_n$ が決定できる。 $u_n(\tilde{x}, t)$ は $\hat{u}_n$ の逆 Fourier 変換により与えられ、車輪位置を $\tilde{x} = ct$ とおくと次のようになる。

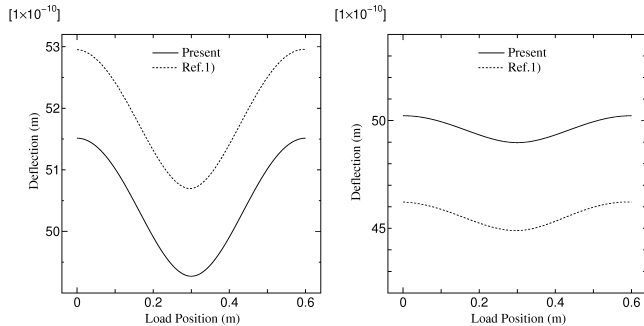
$$u_n(ct, t) := u_n^b(t) = \sum_m A_m^n e^{i\frac{2m\pi}{L}ct} \quad (7)$$

ここで、 A_m^n は次式で与えられる。

$$A_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_m^n(\omega) d\omega$$

表 1 レールの諸元

質量密度 (kg/m ³)	7880
ヤング率 (GPa)	206
断面積 (m ²)	64.05×10 ⁻⁴
断面 2 次モーメント (m ⁴)	1.96×10 ⁻⁵

図 2 荷重作用位置におけるレール変位 (左図) $c=30\text{m/s}$, (右図) $c=100\text{m/s}$

また、式 (3) の $F(t)$ に対する変位応答 $u^b(t)$ は、式 (7) との合成により次のように与えられる。

$$u^b(t) = \sum_n F_n u_n^b = \sum_n \sum_m F_n A_m^n e^{i \frac{2m\pi}{L} ct} \quad (8)$$

次に、車輪の運動について考える。車輪には上から一定荷重 P が作用しているものとする。車輪変位 $w(t)$ は次式で与えられる。

$$w(t) = w_0 + \sum_{m \neq 0} \frac{F_m}{M} \left(\frac{L}{2m\pi c} \right)^2 e^{i \frac{2m\pi}{L} ct} \quad (9)$$

また、車輪・レール間の接触点におけるバネ定数を k とすると次式が成り立つ。

$$F(t) = k [w(t) - u^b(t)] \quad (10)$$

式 (10) に式 (3),(8),(9) を代入して $F_0 = P$ とすると、次のように無限連立方程式を得ることとなる。

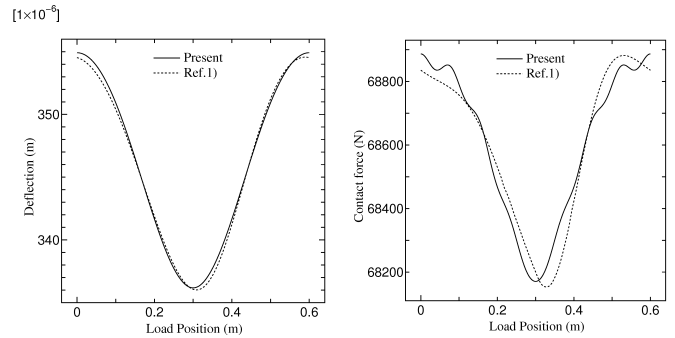
$$w_0 = \frac{P}{k} + \sum_n F_n A_0^n \quad (11)$$

$$\left[1 - \frac{k}{M} \left(\frac{L}{2m\pi c} \right)^2 \right] F_m + k \sum_{n \neq 0} F_n A_m^n = -k P A_m^0 \quad (12)$$

式 (12) を有限項で打ち切り F_n を求めると、式 (3),(7) からレールの接触力や変位などが求まる。

3. 解析例

図 1 に示した様に、剛な道床上にパッド k_s を介して敷設された無限長レールを対象とする。支持間隔は $L = 0.6\text{m}$ 、パッドのバネ剛性は $k_s = 110\text{MN/m}$ と設定し、軌道系は無減衰としている。

図 3 荷重作用位置におけるレール変位 ($c=30\text{m/s}$)図 4 荷重作用位置における接触力 ($c=30\text{m/s}$)

(1) 一定荷重に対する定常応答

単位荷重 ($P = 1\text{N}$) に対する定常応答解析を行った。荷重走行は、 $c = 30, 100\text{m/s}$ の 2 ケースとし、どちらも 50N レールを想定して解析を行った。レールにおける諸元を表 1 に、荷重作用位置におけるレール変位を図 2 に示す。図中、中央部 (0.3m) が支持位置となっている。図には比較のため、時間域表現式¹⁾により求めた応答も示した。

今回の解析結果と時間域での結果を比較すると、何れの走行速度においても両者は比較的良好な一致を示しており、本手法の妥当性が確認できる。

(2) 車輪とレールに対する定常連成応答

上載荷重 ($P = 68600\text{N}$) の下、走行車輪との定常連成応答解析を行った。走行速度は $c = 30\text{m/s}$ とし、 50N レールを想定した。荷重作用位置におけるレール変位を図 3 に、接触力を図 4 に示す。図には比較のため、時間域表現式¹⁾により求めた応答も示した。

まず、図 3 のレール変位について、今回の解析結果と時間域での結果を比較すると、両者は比較的良好な一致を示しており、本手法の妥当性を確認することができる。

また、図 4 の接触力について、今回の解析結果と時間域での結果を比較すると、まくらぎ位置近傍での応答に多少の違いが認められるものの、両者は比較的良好な一致を示していることが確認できる。

4. 今後の展望

今回、離散支持された無限長レールを荷重が走行する場合の定常連成応答の解析手法を構成し、時間域表現式¹⁾により求めた応答と比較することで、その妥当性を確認した。また今回はレールを Euler ばりによりモデル化した。今後は、より現実的な Timoshenko ばりによるモデル化の下で、解法を構成し解析を行っていきたい。

参考文献

- 1) 阿部和久, 森岡泰助, 古田勝: Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化, 構造工学論文集, **44A**, 367-374, 1998.
- 2) 阿部和久, 古屋卓穂, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.