

音の伝播解析におけるインピーダンス条件の適用について

日本大学 フェロー ○野村卓史

日本大学大学院 学生会員 佐藤真太郎 (研究当時)

日本大学 正会員 長谷部寛

1. はじめに

これまでに音の伝播に風や温度成層の影響を考慮できる有限要素法による解析法の開発を進めてきた¹⁾。解析対象が屋外の比較的大きい空間スケールの問題であるため、地表面や家屋等の固体表面の材質の違いを解析で考慮する必要がある。この目的のために境界条件としてインピーダンス条件を導入することを検討した。

2. 基礎方程式

本研究では、圧縮性非粘性流体の運動方程式から誘導される、音波に関する音圧変動 p' と擾乱流速 $\mathbf{v}'$ に関する次の連立偏微分方程式を基礎方程式とした¹⁾。

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla p' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p_0 + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}' + c^2 p' \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \frac{p'}{(\rho_0 c)^2} \nabla p_0 = 0 \quad (2)$$

ここで添え字 0 を付けた量は媒質である空気の状態と運動を表す量で、 ρ_0 は密度、 $\mathbf{v}_0$ は流速ベクトル、 p_0 は気圧分布である。または音速である。 ρ_0 、 $\mathbf{v}_0$ 、 p_0 、 c は定常量と仮定する。すなわち $\mathbf{v}_0$ は定常風分布を表している。

この基礎方程式(1)、(2)に重み付き残差法を適用し、音圧変動 p' と擾乱流速 $\mathbf{v}'$ を節点変数とする有限要素法方程式を導くと、次式のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pv} \\ \mathbf{A}_{vp} & \mathbf{A}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{p}}$ 、 $\bar{\mathbf{v}}$ は音圧および流速の節点変数のベクトル、 $\mathbf{M}_p$ 、 $\mathbf{M}_v$ は質量マトリックスである。また係数マトリックス $\mathbf{A}_{pp}$ 、 $\mathbf{A}_{pv}$ 、 $\mathbf{A}_{vp}$ 、 $\mathbf{A}_{vv}$ は非対称定数係数マトリックスである。本研究では時間積分法として後退 Euler 法を用いている。

3. インピーダンス条件の導入

境界におけるインピーダンス Z は次式で与えられる。

$$p' = -Z v'_n, \quad Z = \rho_0 c \zeta \quad (4)$$

ここで密度と音速の積 $\rho_0 c$ は空気特性インピーダンス、 ζ は無次元量、 v'_n は擾乱流速の境界直交成分である。

インピーダンス条件(4)をマトリックス方程式(3)の時間積分過程 [時刻 t_i から $t_{i+1} (= t_i + \Delta t)$ への時間積分] に導入する方法は、インピーダンス条件を与える境界上の節点変数 $\bar{\mathbf{p}}$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_n$ を次のように更新する方法を用いた。

$$\bar{\mathbf{p}}^{i+1} = -Z \bar{\mathbf{v}}_n^i \quad (\text{if } \zeta \leq 1), \quad \bar{\mathbf{v}}_n^{i+1} = -\bar{\mathbf{p}}^i / Z \quad (\text{if } \zeta \geq 1) \quad (5a, b)$$

すなわちインピーダンス Z が特性インピーダンス $\rho_0 c$ より小さい場合は式(5a)、大きい場合は式(5b)を用いる。 $Z > \rho_0 c$ のときに式(5a)を用いたり、 $Z < \rho_0 c$ のときに式(5b)を用いたりすると解は時間とともに発散する。

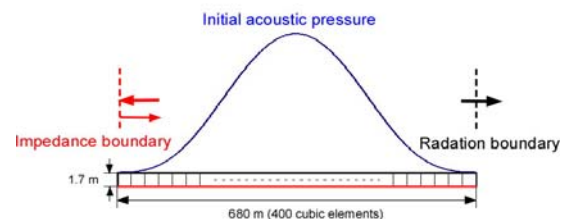
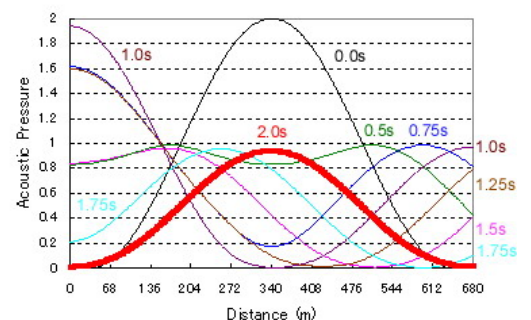
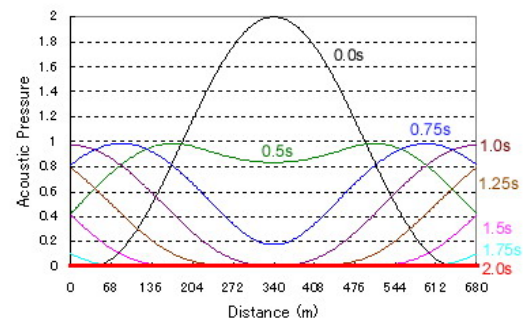


図1 検証のための1次元解析



(a) 左端を完全剛にした場合



(b) 左端を特性インピーダンスにした場合

図2 波形の時間変化

キーワード 音の伝播, インピーダンス, 有限要素法, 風

連絡先 〒101-8308 千代田区神田駿河台 1-8-14 日本大学理工学部土木工学科 TEL 03-3259-0411

4. 検証解析

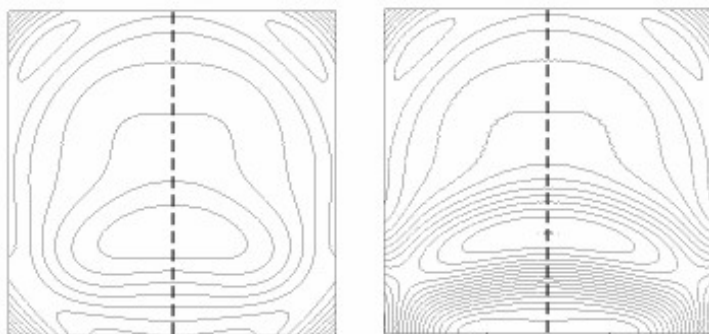
図1に示すように、立方体要素を直列させた1次元領域に初期音圧分布を与えて波動伝播解析を実施した。領域の右端は透過境界条件(Murの条件)¹⁾とし、左端をインピーダンス条件とした。すなわち右に進行した波は領域外に抜け、左に進行した波は左端境界で反射する。密度 $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ (一定)、音速 $c = 340 \text{ m/s}$ (一定)、 $v_0 = 0$, $p_0 = 0$ とした。時間積分間隔は $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ である。

図2(a)は比較のために左端を完全剛($v_n' = 0$, $p' = \text{free}$)としたときの時刻0.0sから2.0sまでの波形の変化である。左端で反射した波が時刻2.0sでちょうど中央に戻っている。これに対して、図2(b)に示すように左端のインピーダンス値を特性インピーダンス($\rho_0 c = 408 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$)に一致させると、左端での波の反射が起こらない、という理想的な結果が得られている。また、図3は左端のインピーダンスの値を種々変化させたときの時刻 $t = 2.0 \text{ s}$ における波形である。インピーダンスが特性インピーダンスより大きいときは、インピーダンスを小さくするにつれて反射波の波高が減少し、特性インピーダンスより小さくすると反射波の位相が逆転するとともに次第に左端が開放条件($p' = 0$, $v_n' = \text{free}$)の場合の波形に近づいていく。

5. 地表面をインピーダンス条件とした解析

図4に示す2次元領域の下辺をインピーダンス条件とし、他の3辺を放射境界条件とする解析を行った。要素には2次元3角形要素を用いた。図中に示したような円形状の初期音圧分布を与え、時間積分間隔は $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ である。密度 $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ (一定)、音速 $c = 340 \text{ m/s}$ (一定)、 $v_0 = 0$, $p_0 = 0$ とした。地表面のインピーダンスの値は、乾燥砂($Z = 714 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$)およびコンクリート($Z = 9584 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$)の値を用いた。

図5は時刻 $t = 1.5 \text{ s}$ における音圧分布である。地表面条件の違いによって異なる反射が起こっていることがわかる。図6は図5の分布図内の波線に沿った音圧分布である。参考のために、地表面が完全に剛の場合の分布も合わせて示している。地表面がコンクリートの場合には完全剛の場合にかなり近い。これに対して乾燥砂の場合は比較的反射波が弱くなっていることが分かる。



(a) 乾燥砂 ($Z = 714 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$) (b) コンクリート ($Z = 9584 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$)

図5 $t = 1.5 \text{ s}$ における音圧分布

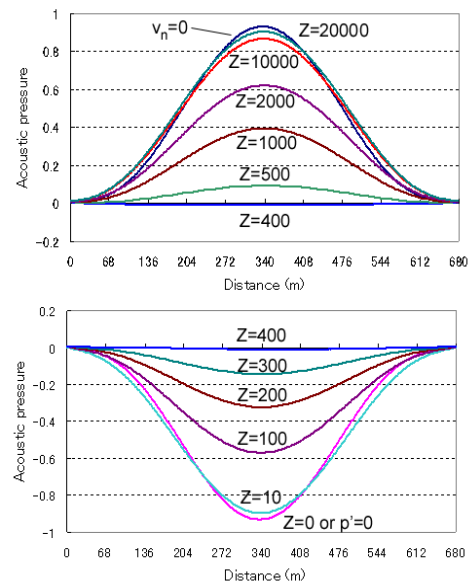


図3 種々のインピーダンス値の時刻 $t = 2.0 \text{ s}$ における波形

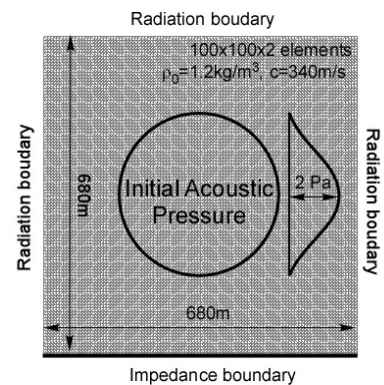


図4 2次元波動解析条件

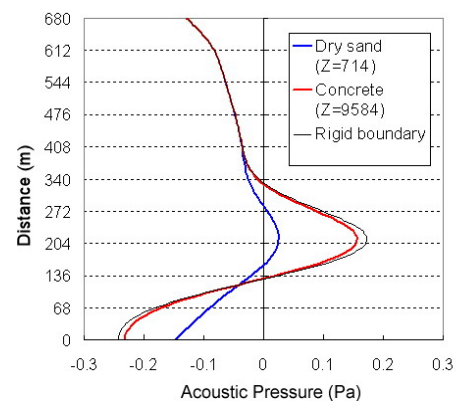


図6 中央鉛直断面上の音圧分布 ($t = 1.5 \text{ s}$)

参考文献

- 1) 野村, 高木: 気象要因の影響を考慮した音の伝播に関する有限要素解析法, 応用力学論文集, Vol.9, pp.221-230, 2006.