

音響散乱問題における形状最適化手法への トポロジー導関数の適用

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 藤生 孝典
新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

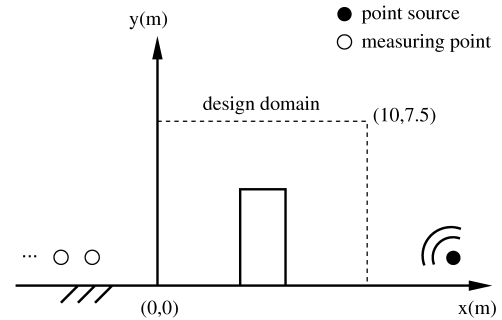


図 1 音響散乱問題

1. はじめに

都市域は、種々の工業・交通騒音にさらされており、騒音の低減は重要な問題となっている。当該問題の解決法の一つとして遮音壁を用いる手法があり、これまで数多くの研究が行われてきた。

文献¹⁾では音響散乱問題における境界要素形状最適化手法について検討されている。当該手法では境界要素端点座標を設計変数とするため、物体形状に何ら制約を課されずに遮音壁の形状最適化が可能である。ただし、多重連結形状の最適解を得るためには、初期形状として一定形状の遮音体を多数配置する必要がある、境界要素数の増加に伴い計算量が増大してしまう。

これらの問題を解決するために、当該手法に対して、トポロジー導関数²⁾の援用を試みる。トポロジー導関数は領域内の微小孔が発達したことによる目的関数の変化率として定義し、これを評価するために境界要素法に基づき定式化を行う。

2. Level set 法に基づく形状最適化手法

図1のような2次元半無限音響場を考え、以下のような最適化問題を解いて行く。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}_b} J(\mathbf{U}; \mathbf{X}_b) &:= F(\mathbf{U}; \mathbf{X}_b) \\ &+ [\boldsymbol{\lambda}]^T \{\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{U}^*\} + \lambda_+(V - V_{max}), \\ \text{subject to} \quad &[\boldsymbol{\lambda}]^T \{\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{U}^*\} = 0 \quad \forall \{\boldsymbol{\lambda}\} \\ &\lambda_+(V - V_{max}) = 0, \quad \lambda_+ \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\{\mathbf{U}\}$ は音圧の節点値ベクトル、 $\{\mathbf{U}^*\}$ は単位点音源による音圧である。当該手法では見かけの固有値問題について Burton-Millor の手法³⁾によって回避する。したがって、 $[\mathbf{H}]$ は通常の境界要素方程式の係数行列と超特異核を有する係数行列とを重み結合したものとして与える。また、 J は目的関数、 F は音圧を評価するコスト関数、 $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ は境界要素方程式に関する Lagrange 乗数ベクトル、 λ_+ は体積 V に関する Lagrange 乗数、 V_{max} は体積に課される許

容値である。なお、本研究では、全ての境界要素端点座標 $\{\mathbf{X}_b\}$ を設計変数として用いる。

式(1)より、随伴変数法の下で、境界形状の変化に伴う目的関数 J の変分 ΔJ を与える設計感度解析を行い、境界要素端点の移動速度 $\{\mathbf{V}_b\}$ を得る。

Level set 関数 ψ は設計領域に固定された格子点上で設定され、以下の移流方程式によって更新される。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は設計領域内の格子点上で与えられる level set 関数の移流速度である。Level set 関数の移流計算では、設計感度解析で得られた境界要素端点の移動速度 $\{\mathbf{V}_b\}$ から、最近接のゼロ等高線分の法線速度に射影することで各格子点の移流速度を作成する。Level set 関数を各 step 毎に式(2)に基づき更新し、その結果からゼロ等高線を求め、その上に境界要素を展開して新たな物体境界を得る。

3. 境界要素法におけるトポロジー導関数

トポロジー導関数を、領域内の無限小孔が発達したことによるコスト関数の変化率として定義する²⁾。領域内に $\hat{\mathbf{x}}$ を中心とした半径 a の空孔が存在する場合、トポロジー導関数 D_T はコスト関数 F を用いて次のように表すことができる。

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ \Delta a \rightarrow 0}} \frac{F(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}; a + \Delta a) - F(\mathbf{U}; a)}{\Delta V_a} \quad (3)$$

ここで、 V_a は空孔の体積であり、 $\Delta V_a = 2\pi a \Delta a$ となる。半径 a の空孔を仮定した場合の目的関数を定義すると、

トポロジー導関数は次式で与えられる.

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{U}}} + [\boldsymbol{\lambda}]^T \right] \{ \dot{\hat{\mathbf{U}}} \}, \quad \{ \dot{\hat{\mathbf{U}}} \} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ \Delta a \rightarrow 0}} \frac{\{ \Delta \hat{\mathbf{U}} \}}{\Delta V_a} \quad (4)$$

ここで, $\hat{\mathbf{U}}$ は次式で与えられる $\hat{u}$ を離散化したものである.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{u}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \dot{\hat{u}}_{hie}(\hat{\mathbf{x}}) + \alpha \dot{\hat{u}}_{ghie}(\hat{\mathbf{x}}), \\ \dot{\hat{u}}_{hie} &= \frac{ik}{4} \left[kH_0^{(1)} u_I \right. \\ &\quad \left. + 2H_1^{(1)} \left(\frac{\partial u_I}{\partial y_1} \cos \theta_0 + \frac{\partial u_I}{\partial y_2} \sin \theta_0 \right) \right] \\ \dot{\hat{u}}_{ghie} &= \frac{ik}{4} \left[\frac{H_1^{(1)} + kr_0 H_2^{(1)} + k^2 r_0^2 H_3^{(1)}}{r_0^3} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_x u_I \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{2kH_2^{(1)}}{r_0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_x \cos \theta_0 - \frac{2H_1^{(1)}}{r_0} n_{x1} \right\} \frac{\partial u_I}{\partial y_1} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{2kH_2^{(1)}}{r_0} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_x \sin \theta_0 - \frac{2H_1^{(1)}}{r_0} n_{x2} \right\} \frac{\partial u_I}{\partial y_2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, $\dot{\hat{u}}_{hie}$, 及び $\dot{\hat{u}}_{ghie}$ は Burton-Millor の手法における通常の境界積分方程式, 及び超特異核を有する積分方程式に関する成分であり, α は重み係数である. また, u_I は入射波の空孔中心点での値であり, k は波数である. $\mathbf{r}_0$ は選点 $\mathbf{x}$ と空孔中心点 $\hat{\mathbf{x}}$ を結ぶベクトル, θ_0 は $\mathbf{r}_0$ の角度であり, $H_n^{(1)}$ は第一種 Hankel 関数 $H_n^{(1)}(kr_0)$ を省略して表したものである.

4. 解析例

(1) 解析条件

構成した手法を音圧最小化問題に適用する. 音圧は次式で定義されるノルムによって評価する.

$$F = \sum_i^N |u(\mathbf{x}_i)| \quad (6)$$

ここで, $u(\mathbf{x}_i)$ は i 番観測点 $\mathbf{x}_i$ における音圧である.

図1で示したような初期形状及び境界条件の下で解析を行う. 点音源は (15,0.5), 観測点は (-50,0.5), (-75,0.5), (-100,0.5), (-125,0.5), (-150,0.5) の5点に配置し, 点音源の周波数は200Hzとした. 設計領域は $[0 \leq x \leq 10] \times [0 \leq y \leq 7.5]$ (m) の長方形領域とし, その領域内にサイズ0.125mの背景格子を設定する. また, 散乱体境界は一定要素で離散化し, 基本要素長は0.125mで与える. 初期形状は1.5m×4mの長方形とし, 体積制約 V_{max} は初期体積 V_0 と同値で与えた.

(2) 遮音壁のトポロジー最適化

本手法を用いた遮音壁の最適化解析の結果を示す. コスト関数の時刻歴を, 比較のため従来法による解析結果と合わせて図2に示す. 本手法により得られた最終形状は図3である. なお, 空孔導入は100step目に行った. トポロジー

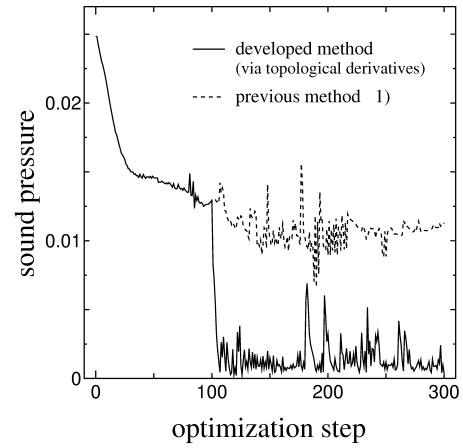


図2 コスト関数の時刻歴応答

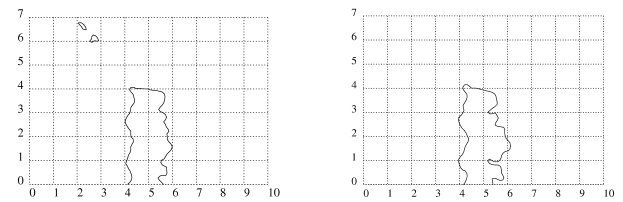


図3 本手法による最終形状 (300th step) 図4 従来法による最終形状 (300th step)

導関数に基づく空孔導入については, トポロジー導関数が最小となる格子点から随時微小孔を導入するものとした.

図2より, 空孔導入による体積の増加は軽微であるものの, 遮音性能は大幅に向上していることが確認できる. 一方, 従来法のみを用いた形状最適化では図4の最終形状を得る. 本手法により微小な散乱体を導入することで, 従来法と比較して観測点の音圧を1/10程度にまで低減できている.

5. おわりに

本研究では, 音響散乱問題における境界要素形状最適化手法に対して, トポロジー導関数の援用を試みた. トポロジー導関数は音響散乱場を対象とした境界要素解析の枠組みの中で定式化し, その妥当性を検討した. また, トポロジー導関数を従来法に援用することで多重連結形状をも包括した最適形状を合理的に探索可能であることを示した. その結果, 当該問題においては, 本手法により微小な散乱体を配置することで遮音性が格段に向上することが確認できた.

参考文献

- 1) Abe, K., Kazama, S. and Koro, K., Shape optimization for sound scattering problems using a BE-based level set method, *Advances in Boundary Element Techniques*, **8**, 379-384, 2007.
- 2) Novotny, A. A., Feijóo, R. A., Taroco, E. and Padra, C., Topological sensitivity analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 803-829, 2003.
- 3) Burton, A. J., and Millor, G. F., The application of integral equation methods to the solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. R. Soc. London Ser.*, **323**, 201-210, 1971.