要素細分割化法を適用したHPMによる材料非線形解析手法の開発

JIP テクノサイエンス 株式会社　正会員　○見原　理一
法政大学　正会員　竹内　則雄

１．目的

著者らは，ハイブリッド型の仮想仕事の原理[1]を基礎にペナルティ法の概念を応用したハイブリッド型ペナルティ法(HPM：Hybrid-type Penalty Method)と称する離散化手法を提案した[2]．また，HPM は，全体領域を部分領域に分割し，それぞれの部分領域において独立に変位場が定義される．つまり，節点は領域形状を認識するためだけに用いられ，FEM のように自由度は持たないため，不適合メッシュによる非線形解析も可能である．そこで，本研究では要素細分割化法を適用した HPM による非線形解析手法を提案し，数値解析例を紹介する．

２．ハイブリッド型仮想仕事の原理

いま，**図 1** の領域Ωは境界Γで囲まれたM個の部分領域$\Omega^{(e)}\subset\Omega$から構成されているものとする．

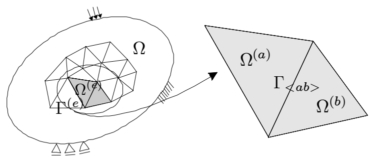


図 1　部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通境界$\Gamma_{<ab>}$

ハイブリッド型の仮想仕事の原理では，隣接する 2 つの部分領域の共通境界$\Gamma_{<ab>}$において付帯条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}=\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)} \quad \text{on} \quad \Gamma_{<ab>} \tag{2}$$

を Lagrange の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて，

$$H_{ab}\overset{\text{def.}}{=}\delta\int_{\Gamma_{<ab>}}\boldsymbol{\lambda}\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}-\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\,dS \tag{3}$$

と表し，仮想仕事式に導入する．隣接する 2 つの部分領域境界辺の数をNとすると，ハイブリッド型の仮想仕事式は次のように表すことができる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}(\delta\boldsymbol{u})dV-\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV\right)$$
$$-\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}}\boldsymbol{\lambda}\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}-\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\,dS\right)-\int_{\Gamma_\sigma}\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS=0$$
$$\forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathbb{V} \tag{4}$$

なお，Lagrange の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$は，次式のように，$\Gamma_{<ab>}$上の表面力を意味している[3].

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{t}^{(a)}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(a)})=-\boldsymbol{t}^{(b)}(\tilde{\boldsymbol{u}}^{(b)}) \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{t}^{(a)}$と$\boldsymbol{t}^{(b)}$は，それぞれ，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力である．

３．要素細分割化法

本研究では，部分領域の細分割化を行う際に，ひずみエネルギーを指標とした．要素細分割化の流れを**図 2** に示す．図に示すように，せん断ひずみエネルギーが最大となる部分領域（図中：赤）を細分割化する．

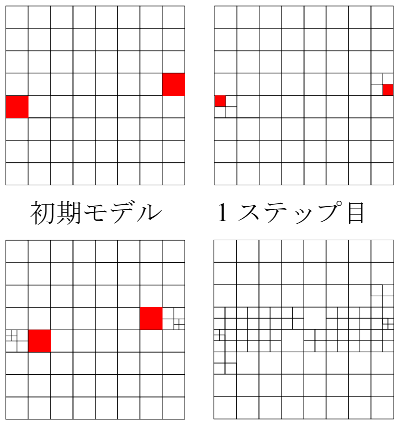


図 2　要素細分割化の流れ

部分領域のせん断ひずみエネルギーは，次式から算出する．

$$\text{ShearStrainenergy}=\frac{1}{2}\int_{\Omega^{(e)}}\gamma_{xy}^2\,dV \tag{6}$$

ここで，γ_{xy}は，せん断ひずみである．

４．材料非線形解析法

本研究では，山田[4]のr_{min}法を応力解法が伴う問題に対し適用できるように拡張している．いま，降伏関数をf，現在の表面力を$\boldsymbol{\lambda}$，増分表面力を$\Delta\boldsymbol{\lambda}$とするとき，次式を満たす増分率$r$が存在する．

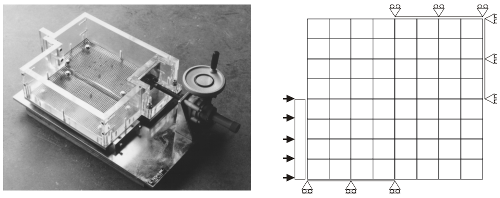
$$f(\boldsymbol{\lambda}+r\cdot\Delta\boldsymbol{\lambda})\leq 0 \tag{6}$$

このrを，考えている様々な破壊条件に基づき，すべての表面力に対して算出する．本研究では，せん断すべり破壊，引張破壊，圧縮破壊および引張破壊後の再接触に対して，この荷重増分率を求めている．

キーワード　ハイブリッド型ペナルティ法，要素細分割化，材料非線形
連絡先　〒103-0025　東京都中央区日本橋茅場町 1-2-5　JIP テクノサイエンス(株) 解析技術部　TEL:03-5614-3204

４．数値解析例（リーデルせん断実験との比較）

リーデルせん断実験とは，二枚の板を並べ，その上に粘性のある土の層を載せ，徐々に板をずらすことで，実際の地盤における基盤部の破壊による表層部の破壊に及ぼす影響を実験的に表現する手法である[5]．**図 3** に実験装置および解析モデルの初期の領域分割を示す．



実験装置　　　解析モデル（8×8）

図 3　リーデルせん断実験装置

図 4 は，線形解析による領域分割の経過を示した図である．図に示すようにせん断ひずみが集中する箇所で集中的に細分割化がなされており，本手法で提案している細分割化アルゴリズムが正確に機能していることを示している．

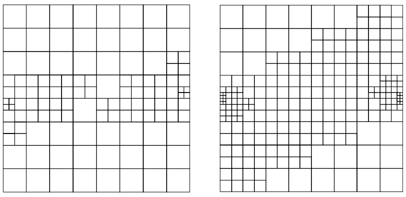


図 4　領域分割の経過（左:Step10，右:Step30）

非線形解析は，**図 4** で示した細分割化後の不適合メッシュを用いて解析を行っている．

図 5 に実験結果を示し，**図 6** に解析で得られた降伏領域を示す．実験と同様に，厚さ 5cm の方が，降伏領域の発生が早く，その領域の進展についても厚さ 5cm の方が広域となる傾向を示した．

図 5　実験結果（左:厚さ 5cm，右:厚さ 10cm）

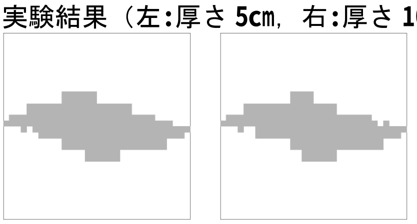


図 6　降伏領域（左:厚さ 5cm，右:厚さ 10cm）

図 7 に変形モードを示す．図に示すように，厚さ 5cm では，亀裂がモデルを水平方向に分断しているのに対して，厚さ 10cm では，モデルを分断するような亀裂は生じておらず，実験と同様の傾向を示した．

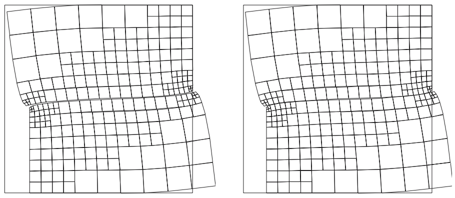
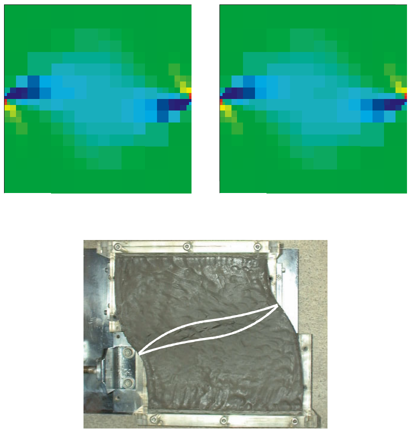


図 7 変形モード（左:厚さ 5cm，右:厚さ 10cm）

図 8 にせん断ひずみ分布を示す．せん断ひずみについても厚さ 5cm・10cm ともにせん断ひずみが高い領域が，実験において得られたひび割れ発生領域の領域形状と類似していることが確認できる．



実験結果

図 8　せん断ひずみ分布（左:厚さ 5cm，右:厚さ 10cm）

５．まとめ

本論文では，要素細分割化法を適用した HPM に材料非線形を考慮した解析手法を提案した．

HPM では，部分領域毎に変位場を仮定することから，節点は領域形状を認識するためだけに用いられる．そのため，本論文で紹介した解析例ように不適合メッシュを用いても一定の解析精度を確保することができる．

また，本論文で提案した手法を用いることで，領域分割数を抑制することができ，解析に要する時間の短縮が図れるものと思われる．

参考文献

1) K.Washizu：Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1975

2) 竹内則雄，草深守人，武田洋，佐藤一雄，川井忠彦：ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析，土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp.261-270, 2000

3) Shi,G.H. and Goodman,R.E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, Int. J. Numerical and Analytical Method in Geomechanics, Vol.13, pp.359-380, 1989.

4) Yamada,Y., Yoshimura,N. and Sakurai,T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by finite element method, Int. J. Mechanical Science, Vol. 10, pp.323-354, 1968.

5) 箭内寛冶・浅川美利：土質工学，彰国社，1993.