

フラックスリミッターによる局所不連続ガラーキン法の高度化

大成建設 正会員 ○本島 貴之, 鈴木 俊一
テクノアルファ 久保 紳

1. 目的

非定常移流分散方程式を有限差分法や有限要素法によって数値的に解く際には、方程式の離散化に起因する解の振動に起因する数値誤差や、この振動を抑制するために付加する数値粘性項に起因した数値分散による数値誤差が生じることが知られている。これらの問題に対処するために様々な解析手法が提案されており、既往の検討¹⁾では2次元移流分散問題に対して2次要素の局所不連続ガラーキン法の適用し、ペクレ数50程度の移流が卓越する場においても精度の高い解が得られることが確認されている。本検討では、さらに移流が卓越するペクレ数100程度までの地下水流動場を対象として、解の振動を制御するスキームであるフラックスリミッターを組み込んだ局所不連続ガラーキン法を開発し、2次元問題を対象として理論解との比較を通じて精度の検証を行った。また、放射性廃棄物処分場の安全性能評価には1次元モデルによる核種移行解析が予定されていることから、2次元問題で得た解析結果を伝達関数とする畳込み積分によって1次元核種移行解析を実施し、フラックスリミッターを用いた局所不連続ガラーキン法の適用が、安全性能評価解析へ与える影響を整理した。なお、フラックスリミッターとはTVD条件を満たすようにフラックスすなわち目的変数の流束を制御する手法であり、流束を制御する度合いについて様々な手法が提案されている。本検討ではそれらの中から、既往の検討²⁾³⁾で提案されている手法を選択した。

2. 2次元問題を対象とした理論解との比較検証

図に示す2次元問題を対象として、フラックスリミッターを用いた局所不連続ガラーキン法を適用し、理論解との比較を行った。比較を行う際には、入力地点から下流側50m地点における計測断面での濃度の積分値を比較した。これは、3.において畳込み積分による核種移行解析を実施することを念頭に置いたためである。2次元問題の支配方程式と境界条件および理論解⁴⁾を以下に示す。

$$\text{支配方程式: } D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda RC = R \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\text{境界条件: } C(0, y, t) = C_0 \quad (-a \leq y \leq a), \quad C(0, y, t) = 0 \quad (y \leq -a, a \leq y)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

理論解:

$$C(x, -\infty < y < \infty, t) = \frac{C_0 x}{4(\pi D_L)^{1/2}} \exp\left(\frac{vx}{2D_L}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^R \exp\left[-\left(\lambda R + \frac{v^2}{4D_L}\right)\tau - \frac{x^2}{4D_L\tau}\right] \\ \cdot \tau^{-3/2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{a-y}{2(D_T\tau)^{1/2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a+y}{2(D_T\tau)^{1/2}}\right) \right] d\tau dy$$

ここに、 C : 核種濃度[ML⁻³], x, y : 位置座標[L], t : 時間[T], v : 実流速[LT⁻¹], D_L および D_T : 分散係数[LT⁻²], λ : 減衰係数[T⁻¹], R : 遅延係数[-]である。

本検討では $v = 3\text{E}-10$ [m/s], $\lambda = \ln(2)/5730$ [1/yr], $R = 1.0$, メッシュ幅 $\Delta x = 2$ [m] とし、分散係数 D_L , D_T はペクレ数 $Pe = v\Delta x / 2D_L$ が 2, 10, 30, 50, 100 となる5ケースを設定した。

局所不連続ガラーキン法による数値解と理論解の比較を図2, 図3に示す。フラックスリミッターを使用しない場合は、ペクレ数が30程度から振動が発生しており、ペクレ数が50程度から数値分散が生じていることが読み取られる。一方、フラックスリミッターを組みこんだ場合には、ペクレ数が100の場合にも振動は発生しない。

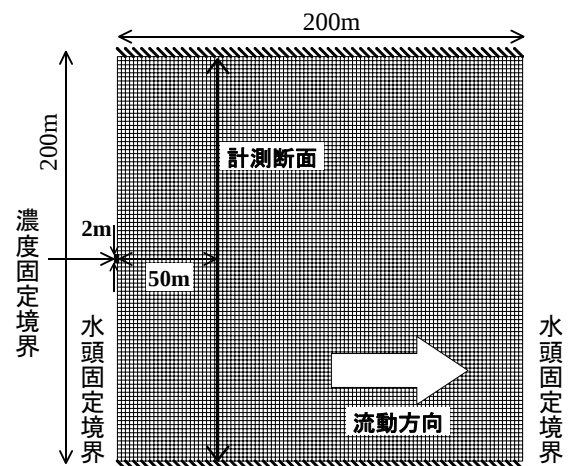
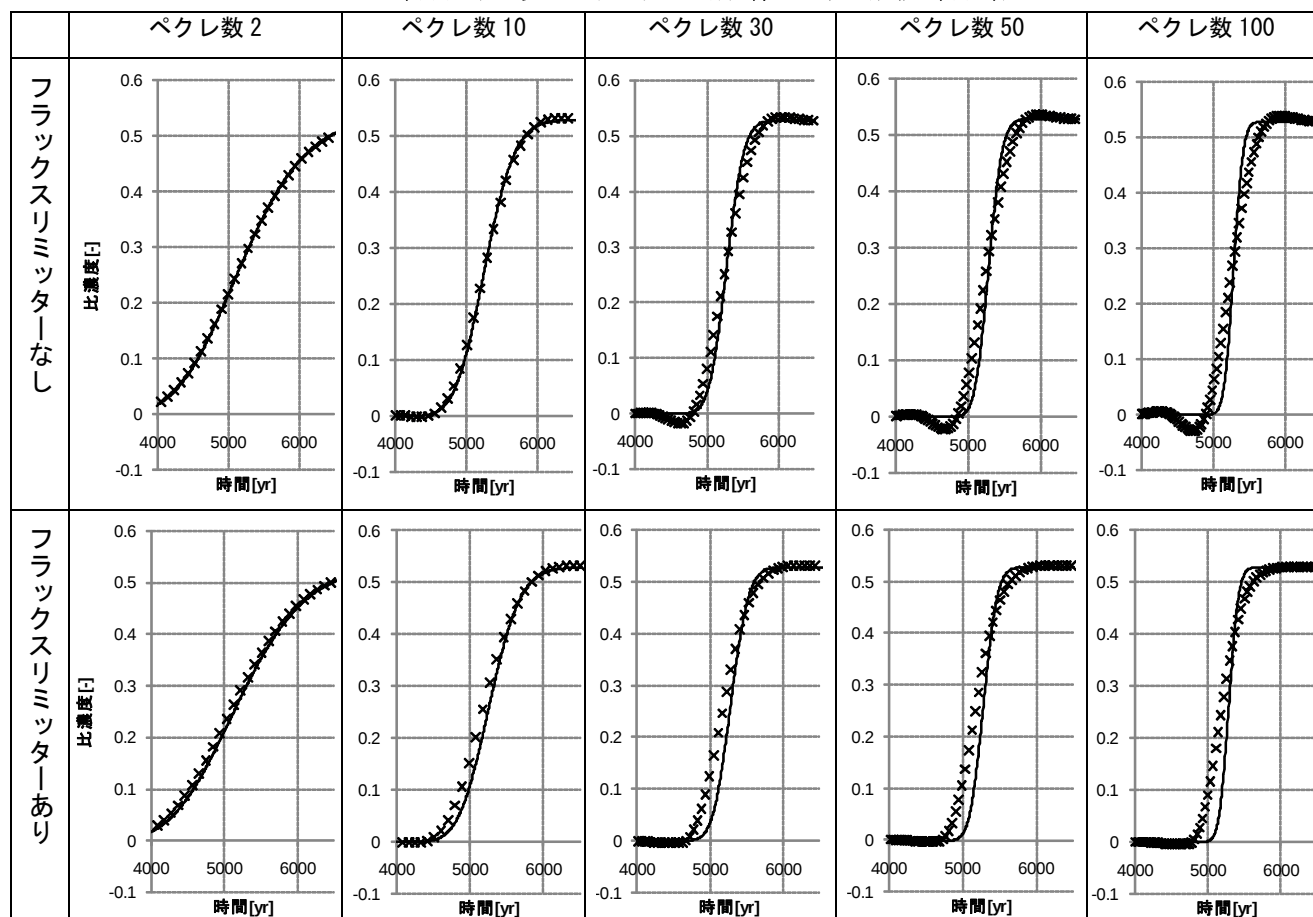


図1 数値解析モデル図

キーワード フラックスリミッター, 局所不連続ガラーキン法, 移流分散方程式,

連絡先 〒163-6009 新宿区西新宿 6-8-1 大成建設(株)原子力本部 Email:mtstky00@pub.taisei.co.jp

表 1 解析結果一覧表 (実線：理論解, ×印：数値解析解)



3. 1次元量込み積分モデルによる検証

伝達関数を用いた核種放出率の式は式 1 にて表される。

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_r(t-\tau) d\tau \quad \text{式 1}$$

ここに、 $y(t)$ ：時間 t における下流端での核種放出率、 $x(t)$ ：時間 t における入力関数、 $h_r(t)$ ：対象地盤の物質移行伝達関数（理論解と、上記表 1 の解析結果から数値微分により作成）である。対象核種は ^{14}C を想定し、核種の入力関数としては、以下の溶出率モデルを選択した。

$$x(t) = \eta M_0 \exp[-(\lambda + \eta)t] \quad \text{式 2}$$

η ：溶出率(=1E-5[1/yr])、 M_0 ：初期物質質量(=1[g])である。量込み積分による解析結果を図 2 に示す。

4. まとめ

フラックスリミッターを組み込んだ局所不連続ガラーキン法を適用することで、ペクレ数が 100 の場合にも数値振動が抑えられることを確認した。一方、フラックスリミッターを用いた場合には、若干の数値分散は生じているものの、溶出率モデルに対する量込み積分を用いた核種移行解析との比較結果より、フラックスリミッターを使用した場合と理論解との差は最大で約 4.8% であり、数値分散の影響は比較的小さいことが明らかとなった。これより、フラックスリミッターを適用した局所不連続ガラーキン法により妥当な核種移行解析が実施できることを確認した。

参考文献 1) 鈴木ほか(2008), 日本原子力学会「2008 年秋の大会」, L05. 2) Chavent et al. (1986) : *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, Studies in Mathematics and its Applications. 3) Hoteit et al. (2004), *Int. J. Numer. Engng.*, 61:2566-2593. 4) Javandel et al. (1984) : *Groundwater Transport: Handbook of Mathematical Models*, AGU.

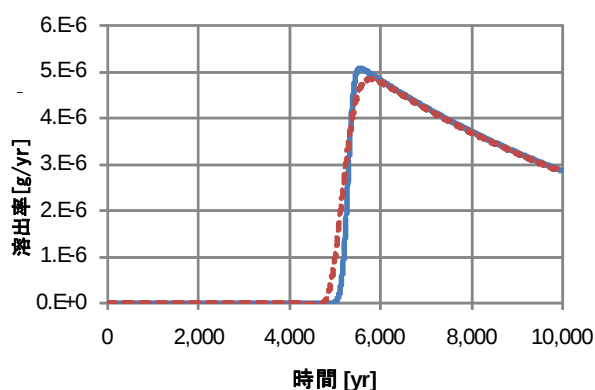


図 2 量込み積分結果