不連続ガラーキン有限要素法の基礎的特性に関する一考察

北海道大学大学院　学生会員　○齋藤　主樹
北海道大学　正会員　蟹江　俊仁
北海道大学　正会員　佐藤　太裕
大成建設(株)　正会員　鈴木　俊一

１．研究目的

不連続ガラーキン有限要素法は，中性子輸送問題の分野において初めて適用された解析手法であり，近年，特に移流が卓越するような移流拡散問題への適用が試みられてきた．そこで，鈴木ら[1)]は一次元非定常移流拡散方程式に対しての適用を行い，透水係数や実効拡散係数等の物性値の不連続性が卓越するような条件下においても，精度の高い解を得られることを実証した．

本研究では，不連続ガラーキン有限要素法における数値流束，形状関数，要素数が解析値に与える影響について一次元の内部放射問題に適用し，比較検討することで，当手法に関する基礎的な特性を把握することを目的とする．

２．不連続ガラーキン法

不連続ガラーキン有限要素法の主な特徴は，各要素間の不連続性を考慮することで，有限要素法と有限差分法の双方の長所を解析値に反映できることである．それに伴いBen Q .Li[2)]は，数値流束の概念と境界での不連続性を導入し，図 1のような境界+側と境界-側での値を定義している．不連続値を与えることの概念を確認するため，以下の一次元の微分方程式を考える．

$$\frac{dF(u)}{dx}+f(u)=0 \tag{1}$$

境界で不連続を許容し，重み関数$v_h(x)$を用いて定式化すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\alpha\left[F\left(u_{j+1}^{+}\right)-F\left(u_{j+1}^{-}\right)\right]v_h\left(x_{j+1}\right)\\&+(1-\alpha)\left[F\left(u_{j}^{+}\right)-F\left(u_{j}^{-}\right)\right]v_h\left(x_{j}\right)\\&+\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left[\frac{dF(u_h)}{dx}+f\left(u_h\right)\right]v_h(x)dx=0\end{aligned} \tag{2}$$

ここで係数αの導入により，$\alpha=0$とすることで$x=x_j$の節点での隣接要素間の不連続量を，当該着目要素内に反映させることができる．また，$\alpha=1$とすることで，$x=x_{j+1}$の節点での隣接要素間の不連続量を，当該着目要素内に反映させることができる．この考え方は移流項を含んだ微分方程式を解析する際の，風上・風下の概念に類似していると考えられる．

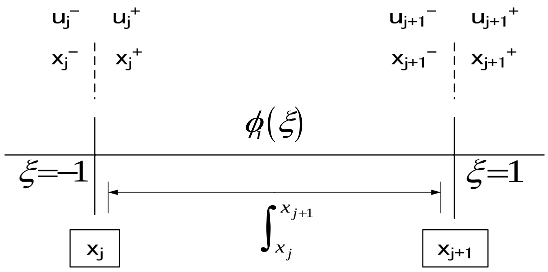

図 1. 不連続値の概念図

３．内部放射問題への適用

不連続ガラーキン有限要素法の基本的な特性を把握するため，$F(u)=u,\ f(u)=u-1$を式(1)に代入し，以下の一次元内部放射問題に関する微分方程式に関して検討を行う．

$$\frac{du}{dx}+u-1=0\ ;\ x\in(0,2)\ \left[u=1-e^{-x}\right] \tag{3}$$

境界の不連続を認め，$\alpha=0$および$\alpha=1$を代入することで以下の式(4)，式(5)が得られる．

$$\left(u_j^{+}-u_j^{-}\right)\phi_i+\int_{x_j^{+}}^{x_{j+1}^{-}}\left[\frac{\partial u_h}{\partial x}+u_h-1\right]\phi_i dx=0 \quad (\alpha=0) \tag{4}$$

$$\left(u_{j+1}^{+}-u_{j+1}^{-}\right)\phi_i+\int_{x_j^{+}}^{x_{j+1}^{-}}\left[\frac{\partial u_h}{\partial x}+u_h-1\right]\phi_i dx=0 \quad (\alpha=1) \tag{5}$$

ここで，$\phi_i=\phi_i(\xi)$はp次の形状関数である．

$\alpha=0$の場合，境界条件を$x=x_j$側に，$\alpha=1$の場合，境界条件を$x=x_{j+1}$側に与えることで解が得られる．各々の場合について以下のように境界条件を与え，解析値について検討する．

$$u(0)=0 \qquad (\alpha=0) \tag{6}$$

$$u(2)=1-e^{-2} \qquad (\alpha=1) \tag{7}$$

キーワード　不連続ガラーキン有限要素法　数値流束　形状関数
連絡先　〒060-8628　北海道札幌市北区13条西8丁目 北海道大学大学院工学研究科 (011)-706－6176

３．解析結果の検討

上述の一次元内部放射問題に関して，形状関数の次数 p を 1～3，要素数 N を 2 または 4，係数 α を 0 または 1 と変化させることで，不連続ガラーキン有限要素法における p, N, α が解析値に及ぼす影響を検討する．図 2は 1 次の形状関数を用いて，$\alpha=1$ とし，$x=0$ で境界条件を与えたときの解析値と理論値のグラフである．要素数を N=2から N=4に増加させることにより，解析精度が高くなっていることがわかる．また，要素数に関わらず，$x=0$ では不連続値の差が大きく現れる結果となった．一方，図 3は 1 次の形状関数を用いて，$\alpha=1$ とし，$x=2$ で境界条件を与えたときの解析値と理論値のグラフであるが，図 2と比較して，$x=1$ で不連続値の差が大きく現れる結果となった．以上のことから，係数 α の与え方が，着目している節点での解析精度に影響することがわかる．

図 4は 2 次の形状関数を用いて，$\alpha=0$ とし，$x=0$ で境界条件を与えたときの解析値と理論値のグラフである．同じ条件で 1 次の形状関数を用いた場合の図 2のグラフと比較して著しく解析精度が高くなっていることがわかる．また，図 5は要素数を 2 としたときの $x=1$ での不連続値 u^+ と u^- の値が形状関数の次数により，理論解に収束していく様子を表したグラフであり，Ben Q .Liは u^+ と u^- の平均値 u を，不連続点での値の 1 つの評価方法として用いている．図 5より，2 次の形状関数を用いることで，大幅に解析精度が向上し，3 次の形状関数を用いるとほぼ理論解と一致していることがわかる．以上のことから，形状関数の次数を大きくすることが，解析精度の向上に大きく影響すると考えられる．

４．考察と今後の課題

本研究により，不連続ガラーキン有限要素法では，境界における不連続性の制御と解析精度の向上には，形状関数の次数が極めて重要であることが明らかとなった．今後，既往の解析手法との比較や，数値拡散を伴う問題についての検討を行い，当手法の適用性・汎用性について確認していく必要がある．

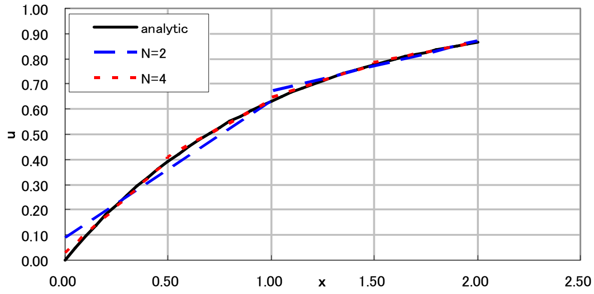

図 2 解析値と理論解の比較(p=1, α=0)

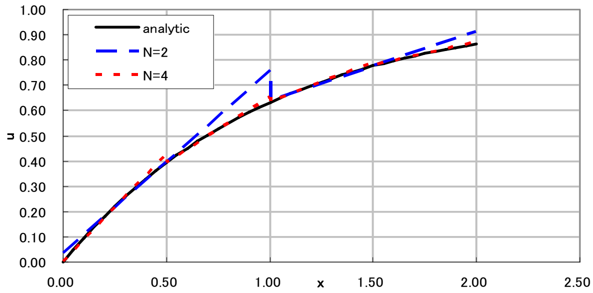

図 3 解析値と理論解の比較(p=1, α=1)

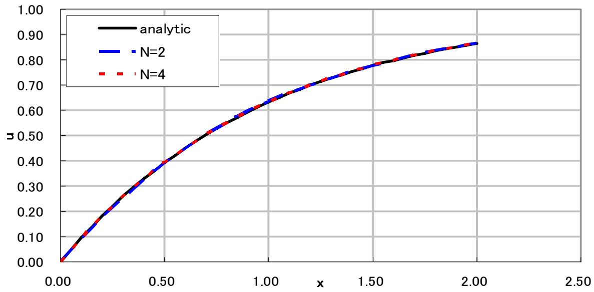

図 4 解析値と理論解の比較(p=2, α=0)

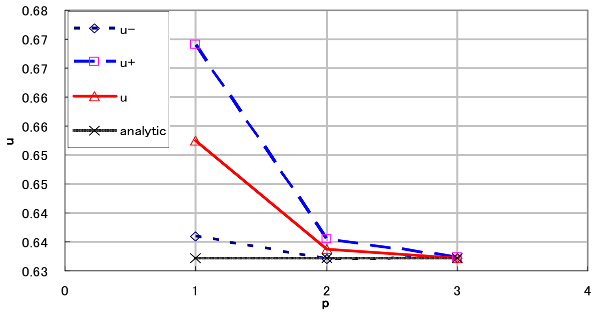

図 5　形状関数の次数 p による不連続値の比較

５．参考文献

1)鈴木俊一，苗村由美，久保紳：不連続ガラーキン法の移流分散問題に対する適用例，日本原子力学会 2008 年秋の大会余稿集，L05,　p.645(2008)

2) Ben Q .Li:”Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer”, *Springer*　pp.1-104 (2006)

3) O.C.Zienkiewitz *et al.*:”On Discontinuous Galerkin Methods”,*International Journal for numerical methods in engineering* (2003)