局所不連続ガラーキン法の３次元移流分散問題への拡張

大成建設　　正会員　○鈴木　俊一　本島　貴之
テクノアルファ　非会員　　久保　紳

１．目的

放射性廃棄物処分施設を対象とした核種移行解析を行う際には，3 次元形状を有する処分施設に対して，施設の諸元や地下水の流向などを考慮しながら，処分施設における収着体積，拡散面積，拡散距離及び別途，地下水浸透流解析により得られた処分施設内への地下水浸入量などを保守的に設定したうえで，有限差分法あるいは有限体積法をベースとした１次元モデルで評価される例が多い．一方，近年の目覚しい計算機能力の向上を考慮すると，近い将来には３次元モデルによる評価が可能となると考えられるものの,解決すべき数値解析的な課題が残っている．例えば，難透水性材料と掘削影響領域といった透水係数が数オーダーも異なるような箇所における地下水の流速ベクトルの精度の問題，さらには，経年変化により止水性能が低下した人工材料部や掘削影響領域などの高透水領域（移流卓越部）における数値振動の問題や数値分散に起因する数値誤差の問題がある．

これらの問題に対処するため，筆者らはまず１次元問題を対象として，混合型有限要素法の一種である局所不連続ガラーキン法による地下水流動－核種移行解析手法を開発した[1]．本検討では開発した解析コードを３次元問題に対応するよう拡張し，理論解との比較を通じて解析コードの精度を検証した．

２．局所不連続ガラーキン法の特徴

不連続ガラーキン有限要素法は，複数の目的変数の有限要素空間を対象とするという理由から，混合型有限要素法の一つであるといえる．また，不連続ガラーキン有限要素法の特徴としては，ガラーキン法等と比較すると数値流束の概念を導入して各要素間の目的変数の連続性が緩和した手法であること，目的変数あるいは目的変数の微分及びこれら双方の各要素間の不連続性を考慮することが可能であること等が挙げられる．さらに，局所不連続ガラーキン法とは，不連続ガラーキン有限要素法の数値流束の与え方を工夫することで目的変数の数を低減することが可能な手法であるといえる．

３．理論解との比較検証

局所不連続ガラーキン法を用いて，ペクレ数($Pe = v\Delta x / 2D$) 1，2，5，10 の 4 ケースに対して 3 次元移流分散問題を解き，理論解との比較を通じて同手法の精度を検証した．本検討で対象とした支配方程式及び境界・初期条件，理論解を以下に示す．また，数値解析を実施したモデル概要図を図 1 に，パラメータ等を表 1-表 3 に示す．

・支配方程式:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - V\frac{\partial C}{\partial x} - \lambda C$$

・境界条件:

$$C = C_0,\ x = 0 \text{ and } Y_1 < y < Y_2,\ Z_1 < z < Z_2$$

$$C = 0,\ x = 0 \text{ and } y < Y_1 \text{ or } Y_2 < y,\ z < Z_1 \text{ or } Z_2 < z$$

$$C,\ \frac{\partial C}{\partial y} = 0,\ \ y = \pm\infty$$

$$C,\ \frac{\partial C}{\partial z} = 0,\ \ z = \pm\infty$$

$$C,\ \frac{\partial C}{\partial x} = 0,\ \ x = 0$$

・初期条件: $C(x, y, z, t = 0) = 0$

・理論解[2),3)]:

$$C(x, y, z, t) = \frac{C_0 x \exp\left(\frac{Vx}{2D_x}\right)}{8\sqrt{\pi D_x}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\left(\frac{V^2}{4D_x} + \lambda\right)\tau - \frac{x^2}{4D_x \tau}\right] \cdot \left\{\mathrm{erfc}\left[\frac{Y_1 - y}{2\sqrt{D_y \tau}}\right] - \mathrm{erfc}\left[\frac{Y_2 - y}{2\sqrt{D_y \tau}}\right]\right\} \cdot \left\{\mathrm{erfc}\left[\frac{Z_1 - z}{2\sqrt{D_z \tau}}\right] - \mathrm{erfc}\left[\frac{Z_2 - z}{2\sqrt{D_z \tau}}\right]\right\} d\tau$$

ここに，C :物質濃度[M/L^3]，t :時間[T]，(x,y,z):座標[L]，D_x, D_y, D_z :分散係数[L^2/T]，V :流速[L/T]，λ :崩壊定数[1/yr].

キーワード　局所不連続ガラーキン法，3 次元移流分散問題，ペクレ数

連絡先　　〒163-6009　東京都新宿区西新宿 6-81　大成建設(株)原子力本部　ＴＥＬ03-5381-5315

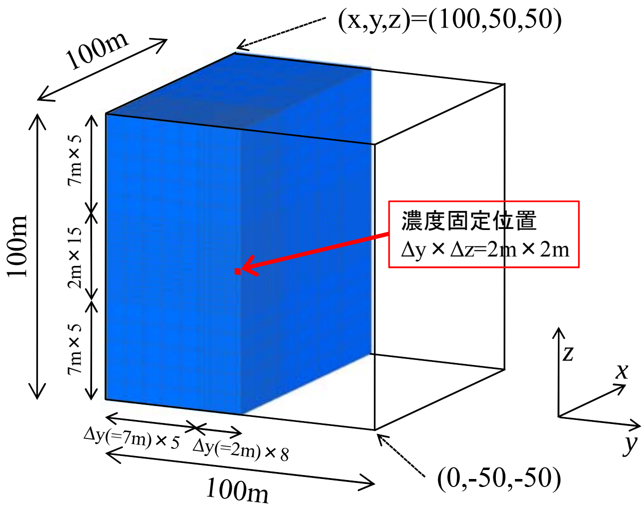

図1 数値解析モデル概要図

表1 パラメーター一覧

分散係数 D_x=D_y=D_z[m^2/s]	2e-10, 1e-10, 4e-11, 2e-11
流速 V [m/s]	2e-10
崩壊定数 λ [1/yr]	ln(2)/5730
物質投入座標 (Y_1, Y_2) [m]	(-1, 1)
物質投入座標 (Z_1, Z_2) [m]	(-1, 1)
境界濃度 C_0 [g/m^3]	1.0

表2 地下水流動の境界条件

dilichlet 条件	$h(x=0, y, z)=100$ $h(x=100, y, z)=0$
neuman 条件	Dilichlet 条件以外の外周面の流量0

表3 濃度計測位置

(x, y, z)	(20, 1, 1)

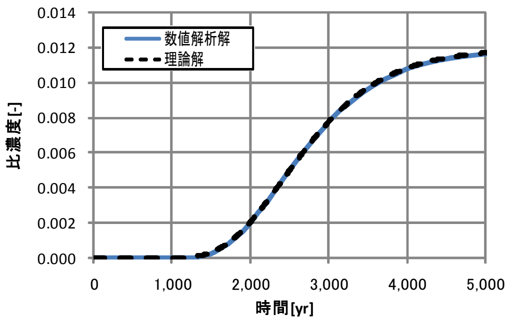

図2 ペクレ数1の比較結果

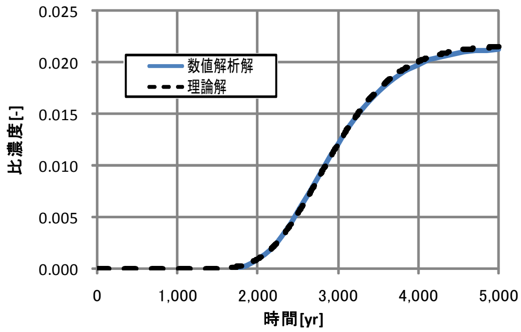

図3 ペクレ数2の比較結果

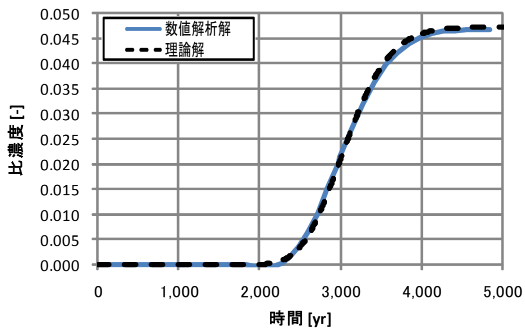

図4 ペクレ数5の比較結果

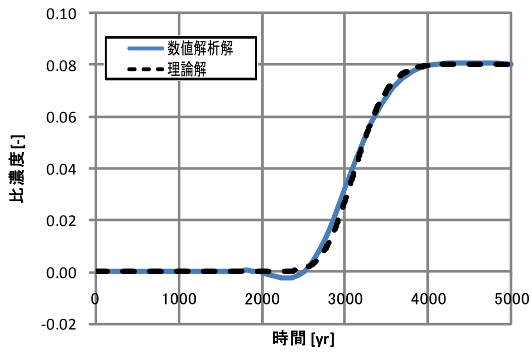

図5 ペクレ数10の比較結果

局所不連続ガラーキン法による数値解析解と，理論解との比較を図2–図5に示す．なお，本検討では1次要素を用い，時間積分についてはクランクニコルソン法を用いた．比較の結果，ペクレ数5までは数値解析解と理論解は一致しており，ペクレ数10の場合には，2,000年程度の時間領域で振動が生じている．ただし振動による誤差は，比濃度の最大値に対して約3%であった．

4．まとめ

移流分散問題に対して高精度の解が期待できることが指摘されている局所不連続ガラーキン法を3次元問題に適用して検証した結果，ペクレ数10での最大誤差は3%であり，妥当な解が得られることを確認した．今後は，時間積分手法や要素次数について，TVD条件やCFL条件に着目して解の振動・数値分散の度合いを整理し，よりペクレ数が大きい領域での局所不連続ガラーキン法の解析精度の検証を実施する予定である．

参考文献 1) 鈴木ほか(2008)，日本原子力学会「2008年秋の大会」，L05. 2) Wexler, E. J. : ANALYTICAL SOLUTIONS FOR ONE-, TWO-, AND THREE-DIMENSIONAL SOLUTE TRANSPORT IN GROUND-WATER SYSTEMS WITH UNIFORM FLOW, US Geological Survey, Techniques of Water-Resources Investigations, Book3, Chapter B7, 1992. 3) Sagar, B. : Dispersion in three dimensions: approximate analytic solutions, American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulics Division, vol.108, no.HY1, pp.47-62, 1982.