

軸力を受けるレールの波動伝播特性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 清水 紗希
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 (財) 鉄道総合技術研究所 正会員 相川 明

1. はじめに

レールは温度変化によって膨張・収縮する。しかし、レールはまくらぎによって固定されているため、特にロングレールの場合は自由に伸縮することができない。そのため、レールは長手方向に圧縮または引張の軸力を受けることになる。この軸力は、レールの座屈・破断の原因となるために、レールの受けている軸力を把握することは、軌道管理上重要となる。

当該軸力の測定を目的に、これまでに様々な方法が検討されてきたが、それぞれに短所があり、条件に適うものがないのが現状である¹⁾。特に、軸力のない状態での初期値の測定を必要とする点が共通した問題点として挙げられる。このため、すでに敷設された状態のレールの軸力は測定できず、初期状態の既知な箇所しか測定できない。また、レール全体の軸力は均一ではなく、局所的に軸力の大きい箇所があるために、限られた箇所のみの測定では十分とはいえない。

そこで本研究では、レールを伝わる波動の伝播特性と軸力との関係に着目し、軸力測定の可能性についての基本的検討を行う。なお、当該法については、実験による検討がなされており、その適用可能性が示唆されている²⁾。本研究では、理論的側面から軸力測定感度について検討する。

以下ではまず、軸力を受けるはりのたわみ振動の運動方程式を求める。次にそれを離散化した後、Floquet 原理³⁾を用い、円振動数 ω と Floquet 波数 κ および軸力 N に関する固有値問題を導出する。この固有値問題を解くことで、周波数 f と Floquet 波数 κ と軸力 N との関係(分散曲面)を求めていく。そして、その曲面の特徴をふまえ、軸力を測定するために適する振動モードについて検討する。

2. 軸力を受けるはりのたわみ振動問題

本研究では、レールを Euler ばりでモデル化する。軸力を受けるはりのたわみ振動から、次の運動方程式が得られる。なお、本研究では水平方向の振動を考える。

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + N \frac{d^2 u}{dx^2} - \omega^2 \rho A u = 0 \quad (1)$$

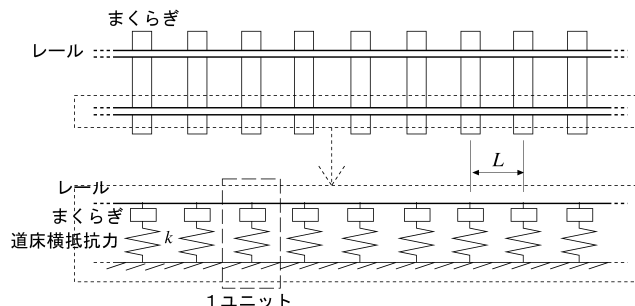


図 1 離散支持された無限長レール

ここで、 u はレールの横たわみ、 EI は曲げ剛性、 N は軸力、 ω は円振動数、 ρ は密度、 A はレールの断面積である。

つぎに、式(1)に対応する仮想仕事式を導き出して離散化すると、次式ようになる。

$$[\bar{\mathbf{W}}]^T [\mathbf{K} - N\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \{\mathbf{U}\} = 0 \quad (2)$$

$$[\mathbf{C}] = \int_0^L EI \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

$\{\mathbf{W}\}$ は任意の仮想節点変位ベクトル、 $\{\bar{\mathbf{W}}\}$ はその共役である。 $[\mathbf{K}]$ はレールの剛性行列、 $[\mathbf{M}]$ は質量行列、 $\{\mathbf{U}\}$ は節点変位ベクトル、 N_i, N_j はたわみ u の補間関数であり、3次 Hermite 多項式により与えられる。

3. 分散特性の解析

ここで、レールをまくらぎにより離散支持された無限周期構造によりモデル化する(図1)。すると Floquet 原理より、周期構造物における定常解は次の第2種周期性をもつ。

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_0 e^{-i\kappa L}, \quad \bar{\mathbf{w}}_L = \bar{\mathbf{w}}_0 e^{i\kappa L} \quad (3)$$

ここで、 L は周期長(まくらぎ間隔)、 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_L$ は1ユニットの左右レール端の節点変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{w}}_0, \bar{\mathbf{w}}_L$ は1ユニットの左右レール端の仮想節点変位ベクトルの共役、 κ は Floquet 波数である。

式(3)を式(2)に適用し $\mathbf{u}_L, \bar{\mathbf{w}}_L$ を消去して次式を得る。

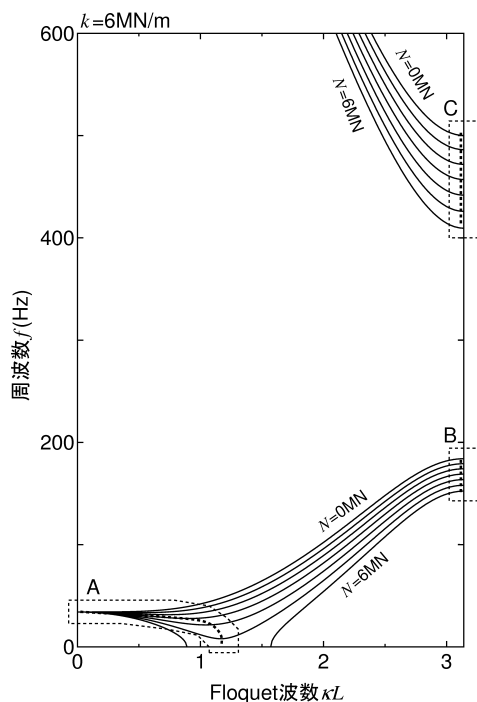
$$[\mathbf{K}' - N\mathbf{C}' - \omega^2 \mathbf{M}'] \{\mathbf{U}'\} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $(\prime)$ は式(3)の条件を課して行列を整理したため、もとの行列とは一致しないことを表している。

式(2)における行列 $\mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{M}$ は実対称行列であるので、式(4)の係数行列は Hermite 行列となる。さらに、各

表 1 50N レールの各種諸条件

質量密度 (kg/m ³)	$\rho = 7880$
断面積 (m ²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
ヤング率 (GPa)	$E = 206$

図 2 周波数 f と Floquet 波数 κL と軸力 N との関係

行列の正定値性より、固有振動数 ω および軸力 N の値は実数値をとる。この固有値問題を解くことで、円振動数 ω と Floquet 波数 κ と軸力 N との関係 (分散曲面) を求める。

4. 解析条件

図 1 で示すように、バネで離散支持された無限長レールを軌道モデルとして考える。バネは道床横抵抗を表し、バネ定数は $k=6\text{MN/m}$ とする⁴⁾。まくらぎ間隔は $L=0.6\text{m}$ とし、PC まくらぎを想定してレール一本あたりのまくらぎ (1/2 本) の質量を 100kg と設定した。レールは 50N レール (表 1) を想定する。

5. 解析結果

横たわみモードの周波数 f と Floquet 波数 κ と軸力 N の関係は 3 次元空間中の曲面として表される。そこで、軸力が 0N から 1MN ごとに増加したときの周波数 f と Floquet 波数 κL の関係を表したものを図 2 に示す。

この図において、それぞれ傾きが 0 になる場所を A, B, C で分類する。この場所は、レールに振動を加えたときに大きく応答するため、測定しやすいモードに相当する。そのため、軸力の測定には、この 3 つの振動モードを利用するのがよいと考えられる。それぞれの特徴を次に示す。

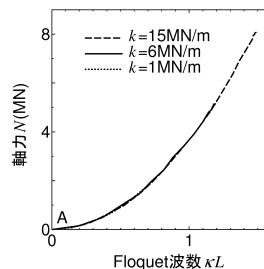


図 3 A の振動モード

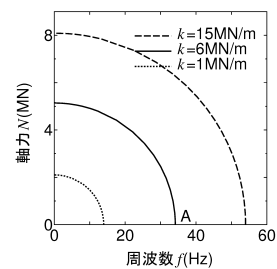


図 4 A の振動モード

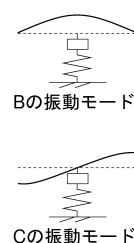


図 5 たわみモード

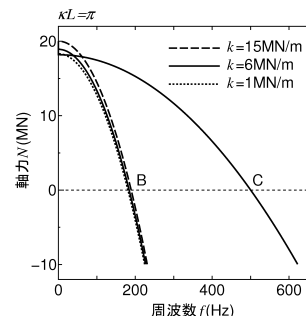


図 6 B, C の振動モード

(1) A の振動モード

実際に座屈が起こる際には、このルートを辿り座屈に至ると考えられる。たわみのない振動から、たわんだ状態で振動が停止する状態に至る。この曲線を軸力-Floquet 波数の面から見たものが図 3、軸力-周波数の面から見たものが図 4 になる。なお、バネ定数の変化による曲線の変化もあわせて示した。軸力の小さいうちは軸力に対する波数の感度がよく、軸力が大きくなると周波数のほうが相対的に感度がよくなっている。また、A において、軸力-Floquet 波数の関係はバネ定数の影響を受けないこともわかる。

(2) B, C の振動モード

B, C のたわみモードを図 5 に示す。B, C ともに波長は $2L$ で、B はまくらぎ間、C はまくらぎ位置が節となっている。B, C の振動モードを軸力-周波数の面から見たものが図 6 になる。なお、バネ定数の変化による曲線の変化もあわせて示した。C の振動モードは、まくらぎ位置が節となるためにバネ定数の影響を受けない。さらに、C のモードは軸力に対する周波数の感度が 3 つのうち最も高い。

6. おわりに

C のモードはバネ定数に依存せず、現段階では軸力測定に最も適していると考えられる。今後は実際のレールを用いた実験を行い、より詳細に検討して行く予定である。

参考文献

- 1) 佐藤正男, 山本陽一: 軌道に敷設されたレールの軸力測定器の開発 (第一報), 鉄道技術研究所速報, No.82-12, 1982.1
- 2) 大宮孝夫 他: ロングレール内軸力に関する基礎的研究, 土木学会第 60 回年次学術講演会, IV, 267-268, 2005.
- 3) 阿部和久, 古屋卓穂, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, Vol.10, pp.1029-1036, 2007.
- 4) 片岡宏夫, 柳川秀明, 高原正樹: 列車荷重を考慮したロングレールの座屈安定性解析, 鉄道総研報告, Vol.17, No.2, 2003.2