焼きなまし法及び罰金法を用いた交通量配分とパラメータ推定の同時計算法の提案

金沢大学大学院　自然科学研究科　学生員　○　穴口　智也
金沢大学　理工研究域環境デザイン学系　正会員　中山晶一朗
金沢大学　理工研究域環境デザイン学系　フェロー　高山　純一

1.　はじめに

交通ネットワークの計画・分析の際，研究・実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．実際に交通ネットワーク均衡モデルを適用する際には，各種パラメータの設定が必要となる．旅行時間関数のパラメータ，経路選択モデルパラメータ，交通容量の設定パラメータなど多くあり，広い意味で捉えると OD 交通量もパラメータと位置付けることもでき，重要なパラメータ推定と言える．現在，多くの場合，パラメータは調査や過去の実例や研究から設定されることが多い．しかし，リンク交通量データ等を用いて，交通ネットワーク均衡モデルと整合性を保ち，内生的にパラメータを推定し，それを用いることも極めて重要と考えられる．

交通ネットワーク均衡の制約の下でパラメータを推定しようとする場合，均衡制約下での最適化問題となる．最適化問題の目的関数としてのパラメータを推定するための二乗誤差の関数や尤度関数が凸であり，均衡制約も凸集合である場合，解の一意性が保証されるが，**図-1** に示すように均衡制約は凸集合とならないことがほとんどであると思われる(**図-1** において，メッシュ部が目的関数値，下部の曲線が均衡制約を満たす解の集合である)．また，二乗誤差関数や尤度関数が凸であるかはそれぞれのネットワーク形状等に依存する部分がある．

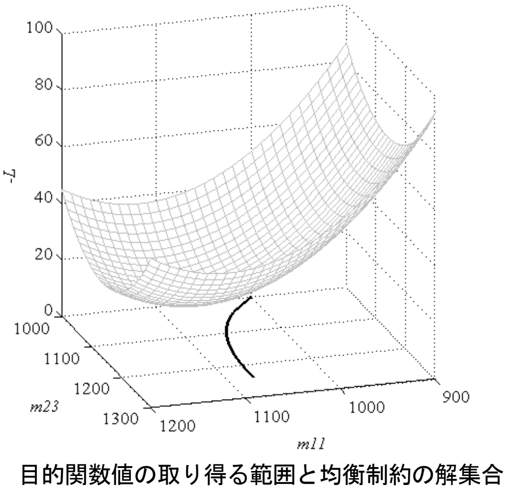

図-1　目的関数値の取り得る範囲と均衡制約の解集合

通常，感度分析を用いて，均衡制約を考慮した上で，上位の最適化問題の目的関数の勾配方向等を計算し，これを用いて通常の最適化アルゴリズムにより計算を行う．均衡制約付最適化問題では，このような通常の最適化手法を用いると，局所解に陥る可能性がある．均衡制約付最適化問題を解く場合のもう一つの問題点は，通常の手法の場合，上位の最適化問題の計算ステップごとに，均衡配分を行う必要があることである．各ステップの上位の最適化問題の目的関数の勾配計算には，それぞれのステップでの均衡配分交通量等が必要となる．均衡配分の計算には時間がかかるため，それは問題となる．

そこで，本研究では，均衡制約付最適化問題の解法として，均衡制約をペナルティ関数として，目的関数に入れ，通常の無制約最適化問題として再定式化し，その最適化問題をシミュレーティッド･アニーリング（Simulated Annealing, SA）により解く手法を提案する．これにより，最適化問題の計算で各ステップごとに毎回均衡配分する必要はなくなり，また，SA により，局所解に陥ってもそこから脱出し，大域解を得られることが期待できる．本稿では，仮想単純ネットワークを対象に，ロジット型利用者均衡モデルの交通量配分のパラメータを最尤推定法で推定する問題を上述の手法を用いて計算し，その妥当性などについて検討する．

2.　ロジット型確率ネットワーク均衡の定式化

(1)　ロジット型確率ネットワーク均衡

本稿では, OD 交通量はポアソン分布に従って確率変動しており，各利用者はロジットモデルに従った経路選択を行っていると仮定する．この場合，経路交通量も独立なポアソン分布に従う．

OD ペア i の経路 j の経路交通量の平均を m_{ij} とする．経路交通量が十分に大きい場合，ポアソン分布の平均と分散はともに m_{ij} であるため，中心極限定理により平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 $\mathrm{N}[m_{ij}, m_{ij}]$ に従うと近似

キーワード　　交通量配分，交通ネットワーク，パラメータ推定，解の一意性
連絡先　　〒920-1192　石川県金沢市角間町　金沢大学大学院自然科学研究科　TEL：076-234-4614

することができる．このとき，リンク交通量$\mathbf{x}$は以下の多変量正規分布として与えることができる．

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{\mu}$は平均リンク交通量ベクトルでその要素はμ_a，$\boldsymbol{\Sigma}$はリンク交通量の分散共分散行列，$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$は$\boldsymbol{\Sigma}$の逆行列，$|\boldsymbol{\Sigma}|$は$\boldsymbol{\Sigma}$の行列式，$n(=|A|)$はリンクの総数である．

また，本研究では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択確率を仮定する．各道路利用者は次式のロジットモデルに従い, 経路選択確率p_{ij}を決定していると仮定する．

$$p_{ij}=\frac{\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij})}{\sum_{j'\in J_n}\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij'})} \tag{2}$$

ここで，$\bar{c}_{ij}$はODペアiの経路jの平均旅行時間，θは正のパラメータである．

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するにあたり，式(3)を含んだ関数

$$\mathbf{g}=(g_{11},\ldots,g_{21},\ldots)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

を考える．関数$\mathbf{g}$の要素g_{ij}を以下のように定義する．

$$g_{ij}(\mathbf{m})=\lambda_i\frac{\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij}(\mathbf{m}))}{\sum_{j'\in J_n}\exp(-\theta\,\bar{c}_{ij'}(\mathbf{m}))} \tag{4}$$

確率ネットワーク均衡は関数（写像）$\mathbf{g}$に関する以下の不動点問題として定式化できる．

$$\mathbf{m}=\mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{5}$$

(2) 最尤推定法

リンク交通量の観測が行われた場合の観測リンク交通量を$\tilde{\mathbf{x}}$とする．観測リンク交通量は式(1)の分布の周辺確率として以下の確率密度関数に従う．

$$f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\tilde{n}}|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})\right\} \tag{6}$$

ここで，式(6)に関して以下の対数尤度関数$L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}})$を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}})=\ln f_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{7}$$

(3) 定式化

以下に示すように，前節で述べた確率ネットワーク均衡が下位問題となった均衡制約付数理計画問題（MPEC）として，最尤推定法を用いた$\boldsymbol{\theta}(=\theta_k(k\in K))$を求めるパラメータ推定を定式化することができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta}}\quad L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{m}) \tag{8a}$$

$$s.t.\quad \mathbf{m}=\mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{8b}$$

3. 同時推定法の構築

通常，均衡制約付最適化問題の計算では，感度分析を用いて，均衡制約を考慮した上で，上位の最適化問題の目的関数の勾配方向等を計算し，これを用いて最適化アルゴリズムにより計算を行う．しかし，目的関数の値の計算，今回の場合，対数尤度関数の値の計算には，平均経路交通量が必要となる．感度分析による勾配方向の計算に均衡配分が必要である．したがって，対数尤度関数の最大化の計算には，毎ステップごとに（確率ロジット）均衡配分が必要となり，計算に時間がかかってしまう．

このような計算コストがかかる問題を回避するために，均衡制約をペナルティ関数として目的関数に付加する方法がある．例えば，Connors，Smiths[1)]らは，先に均衡制約条件を満たす交通量ベクトルを直接算出するのではなく，均衡制約条件に新たなパラメータを掛け合わせて，目的関数に組み込んで同時にパラメータを推定する手法を提案している．本研究ではこのような解法を同時計算法と呼ぶことにする．

本研究で取り上げている交通ネットワーク均衡モデルを，同時計算法を用いて再定式化すると，以下のように表すことができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta},\eta}\quad L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{m})-\eta\|\mathbf{m}-\mathbf{g}(\mathbf{m}|\boldsymbol{\theta})\| \tag{9}$$

ここで，ηは計算回数に応じて増加するパラメータ，$\|\cdot\|$はユークリッドノルムである．新たにパラメータηを導入したため，(9)式には$\boldsymbol{\theta}$とηと$\mathbf{m}$の複数のパラメータが存在することになる．このような多数のパラメータに依る関数の最適化問題を解く際，局所解に陥る可能性が増大するため，著者ら[2)]が開発したシミュレーティッド・アニーリングを応用した最適化手法のような，局所解に陥った場合でも最適解を導出することができるような手法が非常に重要になると考えられる．

4. まとめ

本研究では，ロジット型確率ネットワーク均衡の交通量配分におけるパラメータ推定の同時計算法の提案を行った．実際の計算例は講演時に示す.

参考文献

1) Connors,R., Smith,M.J. and Watling,D. : Bilevel Optimisation of Prices in Network Equilibrium Models, Mathematics in Transport, ELSEVIER LIMTED, pp.27-43, 2007.
2) 穴口智也，中山晶一朗，高山純一：シミュレーティッド・アニーリング及びペナルティ関数を用いた均衡制約付最適化問題の一解法，土木計画学研究・論文集，No.26，投稿中，2009.