拡張有限要素法による薄い地質構造のモデル化

清水建設技術研究所　正　○櫻井英行・正　山田俊子
上智大学　長嶋利夫

1. はじめに

岩盤石油備蓄基地や放射性廃棄物地層処分などの地下施設建設では、地下水流動場の把握が重要であり、FEM 解析等により詳細な検討が行われる。特に、水みちを形成する高透水性の断層や急激な水頭変化をもたらす難透水性の断層等の存在は、地下施設に重大な影響を及ぼす可能性がある。しかし、その地下構造の正確な把握は大変難しく、調査や工事の進展に応じて更新されるため、三次元分布に関するケーススタディが必要となる場合もあるが、複雑に分布する断層を忠実に表現した三次元解析メッシュの作成には、多大な時間と労力を要するため、とりわけ分布のケーススタディは非常に困難な状況にあるのが実状である。

これに対し、著者らは、要素分割とは独立に物性境界を扱うことが可能な拡張有限要素法（X-FEM : eXtended Finite Element Methods）[1]に着目し、薄い構造のモデル化に関する実用性の検討を行ってきた。本報告では、簡単なベンチマーク問題を用いた数値実験により、その有効性を示す。

2. X-FEM

2.1 近似関数の一般系

スカラー関数 $\phi(\mathbf{x})$ に対する X-FEM の近似の一般形は次のよう書ける。

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{I\in\mathbf{N}} \phi_I L_I(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) + \sum_K \sum_{I\in\mathbf{M}^{(K)}} L_I(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) a_I^{(K)} f^{(K)}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

ここに、ϕ_I は $\phi^h(\mathbf{x})$ の節点値、$\mathbf{N}$ は全節点の集合である。$L_I(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$ は節点 I に繋がる要素群を台とする FEM の形状関数、$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ は局所座標系である。X-FEM では、エンリッチ関数と呼ぶ特殊な関数を部分的に導入し、FEM の近似を拡充する。式(1)において、右辺第 2 項の $f^{(K)}(\mathbf{x})$ はエンリッチ関数、$\mathbf{M}^{(K)}$ は拡充される節点の集合、$a_J^{(K)}$ は係数、K はエンリッチ関数の数である。

2.2 レベルセット関数に基づく物性境界のモデル化

レベルセット法は、メッシュ分割に依らず、領域内に任意の自由表面定義を可能にする。各節点 I から自由表面 K までの距離を計算し、面を介して符号を付けた値を $\lambda_I^{(K)}$ とすると、領域内の任意の点における自由表面からの符号付き距離関数（レベルセット関数）は、FEM 形状関数を用いて次のように表すことができる。

$$\lambda^{(K)}(\mathbf{x}) = \sum_{I\in\mathbf{N}} \lambda_I^{(K)} L_I(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \tag{2}$$

従って、自由表面は、**図-1** に示すように節点上のレベルセット関数値から内挿し、関数値がゼロとなる面として陰的に表現される。一つの薄層をモデル化するには、一対のレベルセット関数を用意し、レベルセット関数の不等式で表現する。

物性境界では、物理量が連続で微分値が不連続となる。レベルセット関数の絶対値を取れば、容易にそれを表現できるが、本研究では、Moës ら [2]が提案した関数をより安定な解が得られるように修正した次式を用いている [3]。

$$f^{(K)}(\mathbf{x}) = 1 - \left| \sum_{J\in\mathbf{M}^{(K)}} \lambda_J^{(K)} L_J(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \right| \Big/ \sum_{J\in\mathbf{M}^{(K)}} \left|\lambda_J^{(K)}\right| L_J(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \tag{3}$$

近似関数に部分的に式(1)を用いること、その節点自由度が増加することを除けば、概ね通常の FEM と同様の手続きで最終的な代数方程式を得ることができる。

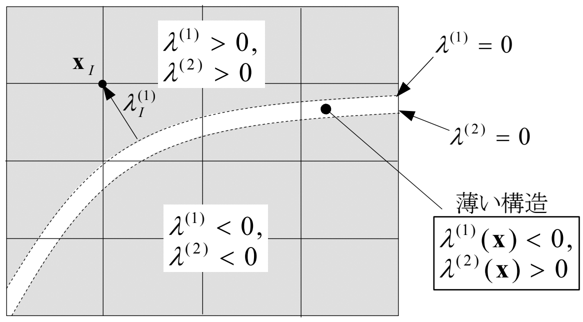


図-1 レベルセット法による薄い構造のモデル化

3. 数値実験

図-2 に示す浸透流問題において、三次元的に分布する薄い構造（薄層）を考え、その透水係数 k_f が周辺の透水係数 k_0 と比較して難透水（$k_f = 1/100k_0$）の場合と高透水（$k_f = 100k_0$）の場合について、薄層の厚さ t に関するケーススタディを行った。境界条件は、モデルの上面で x 方向の動水勾配が 1.0 となるように ϕ を拘束し、その他の面ではフラックスをゼロとした。

モデル化の異なる 3 種類の解析を実施し、解析結果の比

キーワード：拡張有限要素法，extended finite element method，浸透流解析，微分不連続，レベルセット法
連絡先：〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設（株）技術研究所 原子力施設技術センター TEL(03)3820-8419

較を行った。**図-3** に示す(a)通常の FEM で薄層を要素分割した場合([参照 FEM])、(b) X-FEM による微分不連続関数によるモデル化([本 X-FEM])、(c)薄層を含む要素の透水性を均質化し直交異方性媒体としたモデル化([均質化 FEM])の 3 種である。

図-4 は、薄層厚さと解析精度の関係である。赤丸は[本 X-FEM]の結果、白丸は、[均質化 FEM]の結果である。解析精度は、[参照 FEM]の結果を正解と仮定し、基本境界条件の節点を除いて計算する次の E_ϕ を指標として評価した。

$$E_\phi = \left\{ \sum_{I\in\mathbf{N},\mathbf{x}\notin S_\phi} (\phi_I - \phi_I^{FEM})^2/(\phi_I^{FEM})^2 \right\}^{1/2} \Big/ \sum_{I\in\mathbf{N},\mathbf{x}\notin S_\phi} 1 \qquad (5)$$

図より、[本 X-FEM]による解は、薄層の透水性や厚さに依らず、良好な解が与えることが分かる。

図-5 は、薄層が厚さ 0.4m で難透水($k_f = 1/100k_0$)の場合の $y = 0.0$ における xz 平面でのコンターの比較である。図中、黒の破線が[参照 FEM]、黒の実線が[本 X-FEM]、白線が[均質化 FEM]の結果である。図化には、図-2(a)のメッシュを用いたため、薄層境界に自由度のない[本 X-FEM]と[均質化 FEM]のコンターは、薄層を含む要素内(**図-5** の階段状の領域)では描けない。しかし、X-FEM の場合、解析結果から式(1)を用いて内挿することが可能である。**図-5** の赤の実線は、その内挿値である。[本 X-FEM]の結果は、内挿した結果も含め、[参照 FEM]と良く一致していることが分かる。一方、[均質化 FEM]の結果は、特に、薄層近傍で解が大きく外れている。薄い構造が特に難透水の場合には、均質化モデルによる結果評価には注意が必要である。

4. おわりに

地下水浸透流解析におけるメッシュ分割の効率化を目的として、X-FEM を用い、要素サイズに比べて薄い構造をモデル化できるプログラム開発に着手し、解析精度に関する数値実験を実施した。薄層を含む要素を均質化し、直交異方性媒体としてモデル化する従来法との比較により、本手法は、薄層の透水性や厚さに因らず良好な解を与えることが確認できた。さらに、近似関数を用いて節点値から内挿することにより、薄層の境界面の値も精度良く計算できることが分かった。本検討により、断層等の薄い地質構造のモデル化が通常の FEM に比べて格段に効率よく柔軟にモデル化できる見通しが得られた。実用化のためには、薄層の交差、四面体および五面体要素への対応や、飽和-不飽和モデルへの適応性の検討、プリ/ポスト処理の整備が必要である。

引用文献

1) Moës, N et al.: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 46, 131-150, 1999.

2) Moës, N et al.: A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 192, 3163-3177, 2003.

3) 櫻井英行ほか:薄い内在物のモデル化に関する X-FEM の解析精度, 計算工学講演会論文集, 14, 2009.(提出済)

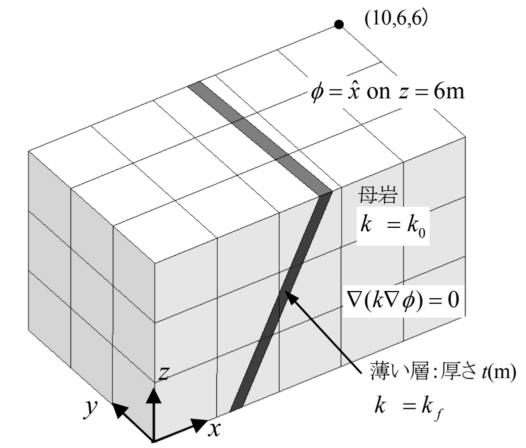
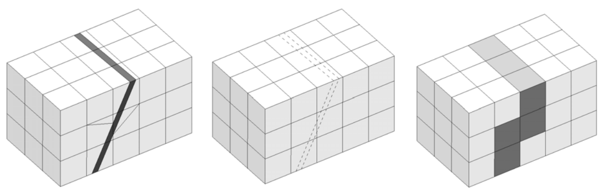


図-2 解析モデル



(a) FEM 要素分割　(b) X-FEM　(c) FEM 均質化

図-3 3 種のモデル化

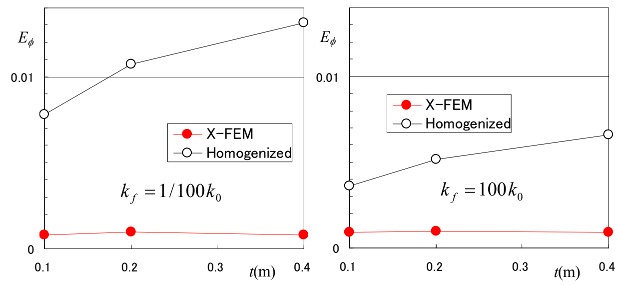


図-4 薄層厚さ t と誤差指標の関係

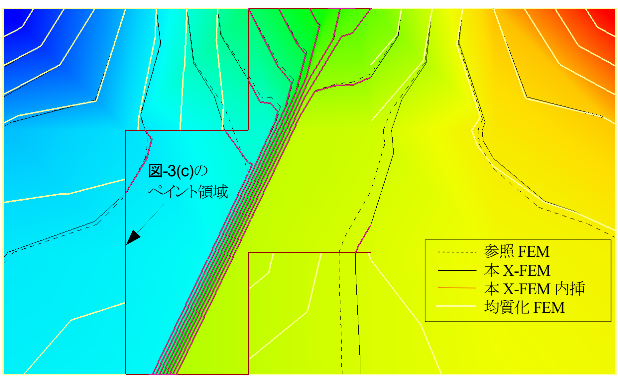


図-5 ポテンシャル分布の比較(xz 断面)