Material Point Methodを用いた地盤の3次元大変形解析

鉄道総合技術研究所　　正会員　○篠田　昌弘・阿部　慶太

１．はじめに

近年，流体や固体を粒子によって離散化する粒子法による解析が進展している．粒子法は，計算メッシュを陽に用いない方法であることから，土石流や水流のような流動的な変形に対応可能であり，船舶の波浪衝撃解析など実務的な適用も勧められている．そこで，本研究では，地盤の大変形問題に対する粒子法の適用法を提案することを目的とし，地盤の非線形性を取り入れた大規模領域での解析や流体と固体が混在する問題に対する適用性に関する検討を実施する．

２．Material Point Methodの概要

本研究で用いる粒子法は，MPM(Material Point Method)と呼ばれる手法であり，移流項を粒子で他の項を格子で計算するPIC(Particle in Cell)という粒子法の一種である．この手法の特徴は，粒子を用いて完全ラグランジュ法で移流を計算するため，数値拡散が発生しにくいこと，粒子が移動可能な境界を格子により容易に設定できること等が挙げられる．また，有限要素法(FEM)での離散化手法と同様に，MPMでも格子への内挿関数を用いた弱形式化と離散化を行うため，今まで蓄積されたFEMの数値解析技術（地盤の非線形構成則や非線形解法）を活用できる．

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0 \tag{1}$$

$$\rho a_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = T_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \tag{4}$$

MPMでは，連続体の力学から連続体の支配法的式は式(1)から式(4)のように導出される．ここで，$\rho(\mathbf{x}, t)$ は質量の密度，$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = a_i(\mathbf{x}, \mathrm{t})$は加速度ベクトル，$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=v_i(\mathbf{x},t)$は速度ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)= \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$は応力テンソル，$\mathbf{b}(\mathbf{x},t)=b_i(\mathbf{x},t)$は単位体積力ベクトル，$\mathbf{T}=T_{ijkl}$は剛性係数テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t)= \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)$はひずみテンソルである．ただし，$\mathbf{x}=x_i$は時刻$t$での位置を表し $t=0$ での位置$\mathbf{X}=X_i$を用いて$x_i=x_i(\mathbf{X},t)$と表せる．すなわち，$x_i(\mathbf{X},0)=X_i$である．式(1)は質量の保存則を表し，式(2)は運動量の保存則を表している．エネルギーの保存則も考慮する必要があるが，ここでは熱量の影響を考慮しないため省略する．また，角運動量の保存則から応力テンソルが対称であることから，$\sigma_{ij} =\sigma_{ji}$ が与えられる．式(2)の両辺に任意のベクトル関数$\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=w_i(\mathbf{x},t)$を両辺にかけて連続体の形状Ω上で積分すると以下の式が得られる．

$$\int_\Omega \rho a_i w_i d\Omega = \int_{\partial\Omega_\tau} w_i \tau(t) dS - \int_\Omega \rho\sigma^s_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_\Omega \rho b_i w_i d\Omega \tag{5}$$

次に式(3)について考慮する．任意のテンソル関数$\rho\mathbf{W}(\mathbf{x},t)= \rho W_{ij}(\mathbf{x},t)$を両辺にかけて連続体の形状Ω上で積分すると以下の式が得られる．

$$\int_\Omega \rho W_{ij}\left(\frac{d\sigma^s_{ij}}{dt} - T^s_{ijkl}\frac{d\varepsilon_{kl}}{dt}\right) d\Omega = 0 \tag{6}$$

同様に，式(4)に対して任意のテンソル関数$\rho\mathbf{W}^*(\mathbf{x},t)= \rho W_{ij}^*(\mathbf{x},t)$を両辺にかけて連続体の形状Ω上で積分すると以下の式が得られる．

$$\int_\Omega \rho W^*_{ij}\left\{\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)\right\} d\Omega = 0 \tag{7}$$

式(5)は要素上で解かれ，式(6)，(7)はラグランジュ粒子により表現される．なお，離散化については，文献1)を参照されたい．

キーワード　粒子法，大変形解析，数値解析

連絡先　〒185-8540　東京都国分寺市光町2-8-38　（財）鉄道総合技術研究所　基礎・土構造　TEL042-573-7261

３．解析結果

図 1 に弾性体球の解析モデルを示す．MPM による解析では，1.0 m×1.0 m×1.0 m の弾性体球を摩擦なしの水平面に落下させた．図 2 に理論解と計算結果との比較を示す．理論解と計算結果は良く一致していることが分かる．解析結果を分析した結果，全エネルギーが保存されていることは確認済みである．さらに本検討では，MPM の検証のため，Denlinger による模型実験 2)の検証解析を実施した．図 3 に，Denlinger による斜面における乾燥砂を用いた斜面崩壊の実験の概要図を示す．本解析での地盤材料の構成則では弾完全塑性モデルを用いた．図 4 と図 5 に解析結果を示す．図 4 と図 5 から時々刻々斜面地盤が変形している様子が分かる．

４．まとめと今後の課題

地盤の大変形挙動を解析するため，MPM(Material Point Method)による 3 次元大変形解析コードを開発した．開発したコードには，地盤材料の構成則として弾完全塑性モデルを適用した．開発した 3 次元大変形解析コードを用いて斜面の流動解析を実施した結果，模型実験結果をある程度精度良く解析することができた．今後は，地盤の非線形弾塑性構成則の導入や，動的入力機能を追加することで，適用範囲を拡大させていく予定である．

参考文献 (1) 阿部慶太，Johansson Jörgen，小長井　一男：MPM を応用した高速長距離土砂流動の運動範囲予測のための数値解析手法，土木学会論文集 C，Vol.63，No.1，pp.93-109，2007. (2) Denlinger, R.P. and Iverson, R.M.: Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain, 2. Numerical prediction and experimental tests, *Journal of Geophysical research*, 106(B1), pp. 553-566.

図 1　弾性体球の解析モデル

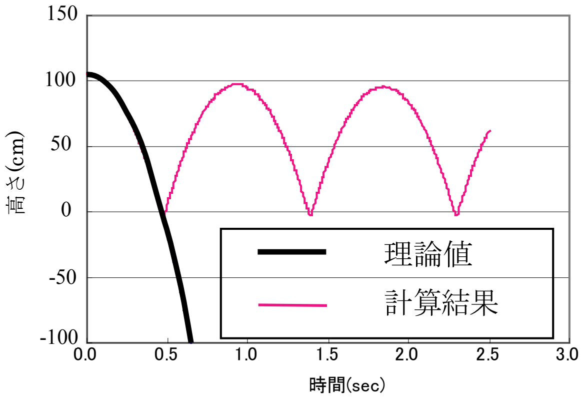

図 2　理論解と計算値との比較

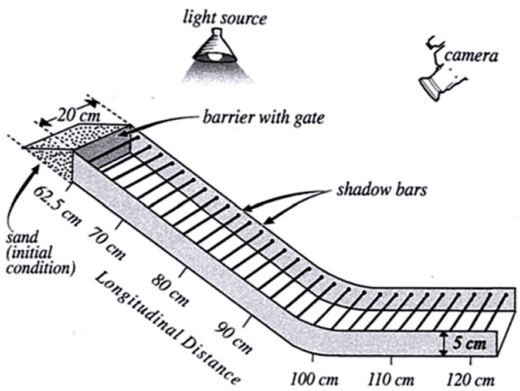

図 3　流動実験の概要 2)

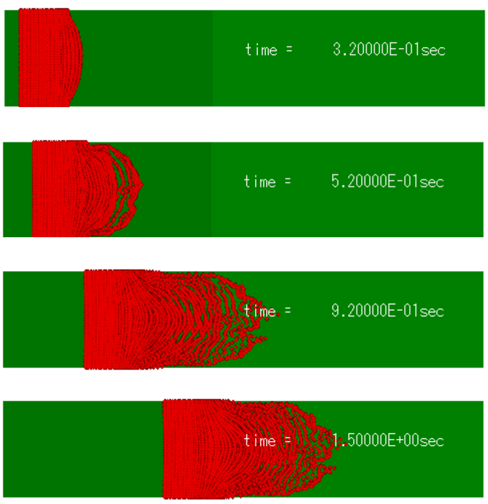

図 4　模型実験の検証解析（壁面なし）

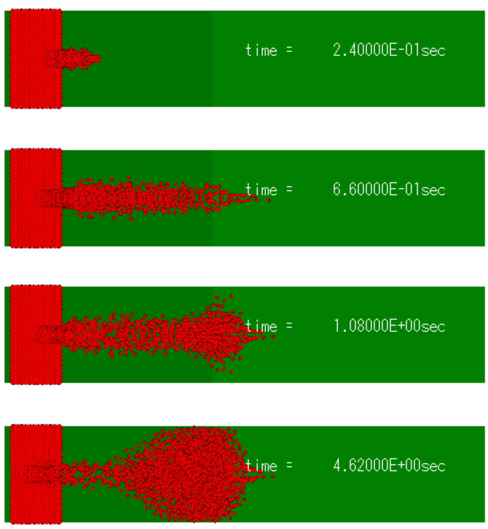

図 5　模型実験の検証解析（壁面あり）