

不飽和土の MPM-FDM 連成シミュレーション法

京都大学大学院 正会員 ○肥後 陽介, 木元 小百合
 京都大学大学院 フェロー会員 岡 二三生
 三菱商事株式会社(元京都大学大学院) 正会員 森中 雄一
 京都大学大学院 学生会員 後藤 優典

1. はじめに

Sulsky, Chen and Schreyer (1994)¹⁾によって提案された Material Point Method (MPM) では, 連続体を Lagrangian 粒子に代表される有限の subregion にわけ, 物質の構成則は粒子上で評価されるが, 運動方程式はバックグラウンドの Euler 計算格子で定式化され, 計算格子は任意に設定する事ができるため, メッシュの絡み合いの問題が発生せず大変形問題を解析する事ができる. 筆者らは, MPM を固液二相連成解析手法へ拡張し, 飽和多孔質弾性体のシミュレーションを行ってきた(例えば参考文献²⁾). 本研究では, 不飽和の河川堤防など, 浸透と破壊までの大変形をシミュレーションするため, MPM を空気-水-土の三相連成解析法へさらに拡張し, 不飽和土の MPM-FDM 連成シミュレーション法を構築した. 解析例として, 一次元浸透-変形連成解析を行った.

2. MPM-FDM 連成シミュレーション法の定式化³⁾

2. 1 骨格応力の概念

不飽和土の応力変数として, 骨格応力の概念を導入する. 引張りを正とし, 次式で表される.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \{S_r p^f \delta_{ij} + (1 - S_r) p^a \delta_{ij}\} \quad (1)$$

ここに, σ'_{ij} は骨格応力テンソル, p^f は水圧, p^a は気圧, S_r は飽和度である. なお, 骨格応力を扱うにあたり本来は構成式にサクシジョンの影響を導入するべきであるが, 本検討では考慮していない.

2. 2 三相系簡易法の支配方程式

混合体の運動方程式は以下のように表される.

$$\rho a_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho b_i = 0 \quad (2)$$

ここで, ρ は全体の密度, a_i は加速度ベクトル, b_i は物体力ベクトルである.

液相および気相に対する連続式を支配方程式とする

が, 気相については, 空気の圧縮性が非常に高いと仮定すると, 空気圧の増分を $\dot{p}^a \approx 0$ とする事ができる. したがって, 初期の気相の圧力が $p_{mi}^a = 0$ であれば, 空気圧は $p^a = 0$ と仮定する事ができる. この仮定は, 気相の連続式を常に満たしている事を意味している⁴⁾.

液相の連続式は以下のように与えられる.

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{k^f}{\gamma_w} \left(\rho^f \ddot{u}_i^s + \frac{\partial p^f}{\partial x_i} - \rho^f b_i \right) \right] + S_r \dot{\epsilon}_{ii}^s + \frac{1}{\bar{K}^f} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\bar{K}^f} = \frac{S_r}{K^f} + \frac{C}{n\gamma_w} \quad (4)$$

ここに, $C = d\theta/d\psi$ は比水分容量, $\theta = V_w/V$ は体積含水率, $\psi = p^f/\gamma_w$ は水頭, $\bar{K}^f$ は見かけの水の体積弾性係数である.

不飽和浸透特性としては van Genuchten の式を用いて水分特性曲線を表しており, 透水係数は Mualem のモデルで表している^{3), 4)}.

2. 3 運動方程式のMPM定式化

混合体に対する運動方程式の弱形式は試験関数 w_i を用いて以下のように書く事ができる.

$$\int_{\Omega} \rho w_i a_i d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \sigma'_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} S_r p^f w_{i,i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} w_i \tau_i dS + \int_{\Omega} \rho w_i b_i d\Omega \quad (5)$$

ここで, ρ は密度, a_i は加速度ベクトル, τ_i は表面力ベクトル, b_i は物体力ベクトルである. σ'_{ij} は MPM 定式化特有の比骨格応力で, 以下のように定義される.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - S_r p^f \delta_{ij} = \rho \sigma'_{ij} - S_r p^f \delta_{ij} \quad (6)$$

ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

MPM では連続体が有限の subregion に分けられ, それぞれが Lagrangian 粒子によって代表される一方で, 運動方程式は Euler 格子上で解かれる. 物体の密度は以下のような粒子の総和として書く事ができる.

キーワード Material Point Method, Finite Difference Method, 不飽和, 連成解析

連絡先 〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスターC1 棟 583 TEL: 075-383-3193

$$\rho(x) = \sum_{p=1}^{N_p} M_p \bar{\delta}(x - X_p), \quad \bar{\delta}(x - X_p) = \delta(x - X_p)/V_p \quad (7)$$

ここで、 δ はDiracのデルタ、 N_p は粒子数、 M_p は粒子の質量、 V_p は各粒子が占める体積である。

計算格子での基底関数については、加速度 $a(x)$ と試験関数 $w(x)$ にそれぞれFEMの4節点アイソパラメトリック要素と同じ形状関数 $N_I(x)$ を基底関数として用い、試験関数の任意性を考慮すると、運動方程式は最終的に以下のように定式化される。

$$m_I a_I - S_r \{K_v\}_I p_E^f = - \sum_{p=1}^{N_p} M_p \sigma'^s(X_p) G_{Ip} + \tau_I + \sum_{p=1}^{N_p} M_p N_I(X_p) b(X_p) \quad (8)$$

ここで、 m_I は格子の lumped mass、 $\{K_v\}_I$ は変位一体積ひずみ関係を表すマトリクスである。

2. 4 液相の連続式のFDM定式化

液相の連続式は有限差分法で離散化する。Oka ら⁵⁾による液状化解析法と同様の方法を用い、間隙水圧を計算格子の中央に定義し、有限体積法により連続式を離散化している。詳細は参考文献⁵⁾を参照されたい。

3. 一次元浸透－変形連成解析

解析例として、不飽和弾性体の一次元浸透－変形連成解析を行った。図1に解析モデルと境界条件を示す。初期の飽和度は60%，ヤング率 E は52 MN/m²，ポアソン比 ν は0.3，初期間隙比 e_0 は0.786，飽和透水係数は 1.0×10^{-3} m/s，van Genuchten パラメータは $\alpha=2.0$ ， $n=4.0$ とした。高さは6mで上部に1.5mの水頭を0.3m/minの速度で与えた。計算時間増分は0.001である。変形と水圧分布を図2に示す。初期飽和度60%に対応して、初期水圧は-5.52kPaとなっているが、水の浸透に伴って水圧が増加し正になっていく様子が見られる。また、全ての土が飽和した後に間隙水圧の分布は正水圧分布になっていることが分かる。本研究で新たに提案した不飽和土のMPM-FDM連成法は浸透－変形問題を良くシミュレーションできていると言える。

4. まとめ

Material Point Method を拡張し、不飽和土のMPM-FDM連成シミュレーション法を新たに開発し、一次元解析によりその不飽和土への適用性を確認した。今後は、洪水時の河川堤防の浸透－変形連成問題へ適用し、大変形および破壊後の挙動までをシミュレーションして行く。

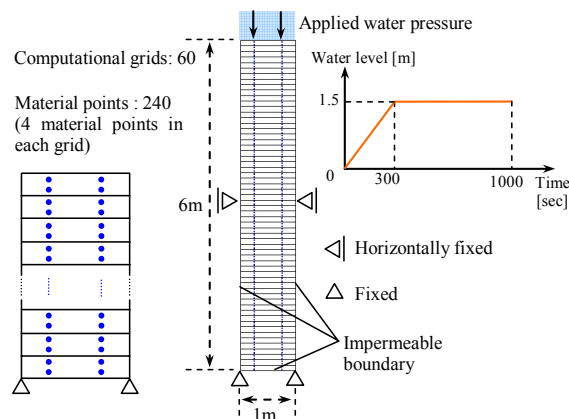


図1 一次元浸透－変形連成解析モデルと境界条件

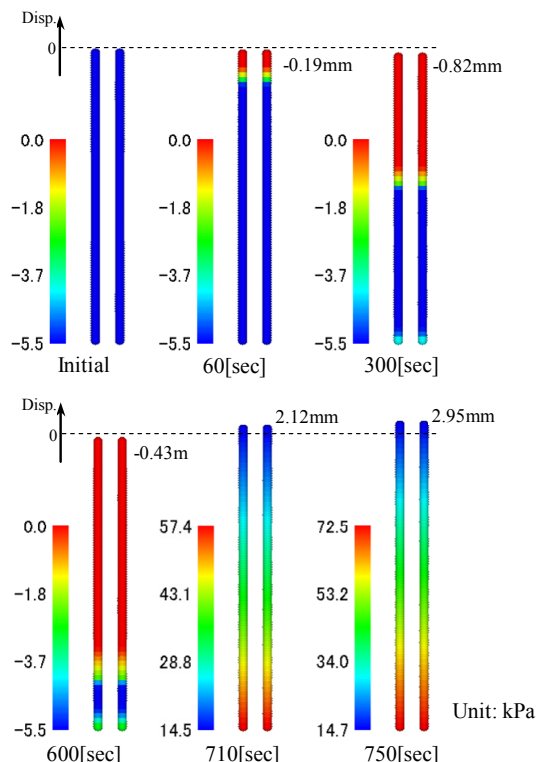


図2 変形図および間隙水圧分布図(変位×100)

謝辞：本研究は財団法人河川環境管理財団の河川整備基金助成事業の一環として行っており(No.20-1151-003, 2007-2008)，ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) Sulsky, D., Chen, Z. & Schreyer H.L. (1994), Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118, pp.79-196.
- 2) 肥後陽介, 後藤優典, 森中雄一, 木元小百合, 岡二三生, Zhen Chen (2009), 計算工学講演会論文集, Vol.14, 東京, 2009.5.
- 3) Higo, Y., Kimoto, S., Oka, F., Morinaka, Y., Goto, Y. and Chen, Z. (2009), Int. Symp. Prediction and Simulation Methods for Geohazard Mitigation, IS-Kyoto, May 25-27 2009, Kyoto, (accepted).
- 4) 加藤亮輔, 岡二三生, 木元小百合, 小高猛司, 角南進 (2009), 土木学会論文集 C, Vol.65, No.1, pp.226-240.
- 5) Oka, F., Yashima, A., Shibata, T., Kato, M. and Uzuoka, R. (1994), Applied Scientific Research, Vol. 52, pp.209-245.