

マクロ・エレメント法における空間離散化手法の拡張

前田建設工業株式会社 正会員 平田 昌史 清水 英樹
 ○ 洞 防人 福田 淳

1. はじめに

関口ら¹⁾によって提案されたマクロ・エレメント法は、3次元的な取扱いが必要なバーチカル・ドレーン打設地盤に対して、2次元平面ひずみ条件下においてもドレーンの集水効果を要素レベルで忠実に考慮できる手法であり、最近では真空圧密工法への適用²⁾も試みられている。マクロ・エレメント法では、要素重心で水頭を代表させる赤井・田村³⁾の手法を用いて空間離散化がなされている。しかしながら、赤井・田村の手法を一般的なメッシュに拡張した場合、メッシュ分割や透水係数などの影響によって正しく計算できない問題⁴⁾が指摘されている。つまり、マクロ・エレメント法はメッシュが直交する特殊な場合にしか適用できない。本研究では、このマクロ・エレメント法を一般的なメッシュに対しても適用できるように空間離散化式を拡張し、プログラムによる検証を行った。

2. 関口らによるマクロ・エレメント法

関口らによるマクロ・エレメント法では、要素内の体積変化量 \dot{V} が、要素境界面からの流出量 \dot{Q} とバーチカル・ドレーンによる流出量 \dot{Q}_{VD} の和であるとし、以下のように定義している。

$$\dot{V} = \dot{Q} + \dot{Q}_{VD} \dots\dots\dots (1)$$

ここで図-1に示すような、一本のバーチカル・ドレーン(直径 $2a$ 、高さ S_z 、透水性 ∞)が存在する要素を考える。この場合、バーチカル・ドレーンによる流出量 \dot{Q}_{VD} は、バーチカル・ドレーンの外周($r = a$)における動水勾配を用いて以下のように求められる。

$$\dot{Q}_{VD} = -\frac{k_x}{\gamma_w} \cdot 2\pi a \cdot \left. \frac{\partial p_w}{\partial r} \right|_{r=a} \cdot S_z \dots\dots\dots (2)$$

ここで p_w は要素内における過剰間隙水圧であり、バーチカル・ドレーン周辺では図-2に示すような分布となる。関口らは、過剰間隙水圧 p_w の分布形状を示す関数 $f(r)$ にBarronの等ひずみサンド・ドレーン問題の解を用いて、

$$f(r) = \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2 - a^2}{2b^2} \dots\dots\dots (3)$$

としている。 b は有効集水半径であり、バーチカル・ドレーンが正方配置であると仮定すると、 $b = S_x/\sqrt{\pi} = S_y/\sqrt{\pi}$ である。他方、図-3に示すように要素内での平均過剰間隙水圧 \bar{p}_w を以下のように定義する。

$$\bar{p}_w = \frac{1}{\pi b^2} \int_0^b 2\pi p_w r dr \dots\dots\dots (4)$$

この平均過剰間隙水圧 \bar{p}_w を用いて、式(2)に示したバーチカル・ドレーンによる流出量 \dot{Q}_{VD} を表すと以下のようになる。

$$\dot{Q}_{VD} = \alpha_{VD} \cdot \bar{p}_w = \alpha_{VD} \cdot \gamma_w h^{me} \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{但し、} \alpha_{VD} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot k_x \cdot S_z}{\gamma_w \cdot b} \cdot \left[\frac{1 - 1/n^2}{\ln(n) - (1 - 1/n^2)(3 - 1/n^2)/4} \right]$$

式(5)に示したバーチカル・ドレーンの流出量と、赤井・田村による水頭の離散化式を用いて、式(1)は以下のように表される。

$$\dot{Q} + \dot{Q}_{VD} = -(\alpha_e - \alpha_{VD}) \cdot \gamma_w h^{me} - \sum_{i=1}^4 \alpha_{ei} \cdot \gamma_w h^{mei} \dots\dots\dots (6)$$

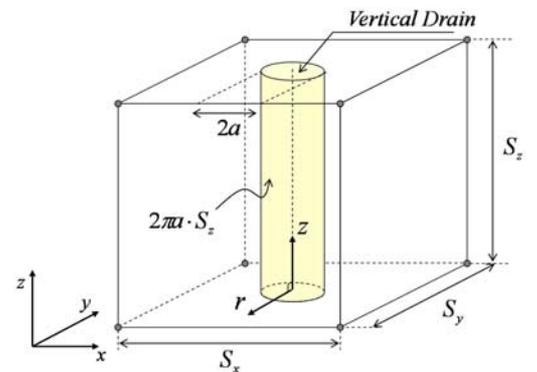


図-1 マクロ・エレメント要素

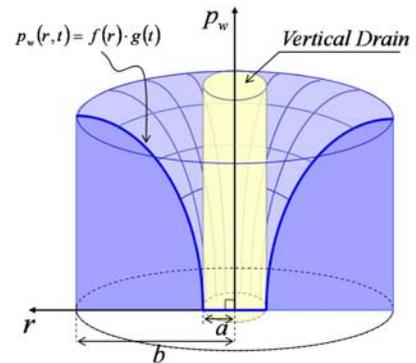


図-2 ドレーン周辺の過剰間隙水圧分布

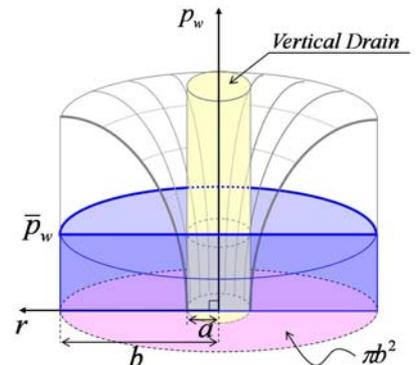


図-3 平均過剰間隙水圧

3. 拡張マクロ・エレメント法の定式化

関口らによると、基本マクロ・エレメント（隣接する要素もマクロ・エレメント要素の場合）では、要素境界 $r = b$ で式(3)が $f'(b) = 0$ （動水勾配がゼロ）となることから、「2個のマクロ・エレメント間を横切る水平方向の水流は生じない」としている。また、遷移マクロ・エレメント（隣接する要素がマクロ・エレメント要素ではない場合）では、マクロ・エレメント要素内の平均過剰間隙水圧は、要素境界から距離 $c = (b - a)/2$ 内側に入った点で代表されるとし、水平方向の流量係数を求めている（図-4 参照）。

$$\alpha_{e1} = \alpha_{e3} = 0 \quad (\text{基本マクロ・エレメントの付帯条件}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\alpha_{e3} = \frac{k_h \cdot \Delta t \cdot S_z / \gamma_w}{c + (l_3 - d_3)} \quad (\text{遷移マクロ・エレメントの付帯条件}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

マクロ・エレメント法を一般的な空間離散化式に拡張する場合、このような要素境界の付帯条件が問題となる。ここで提案する拡張マクロ・エレメント法では、要素境界からの流出量とバーチカル・ドレーンによる流出量が独立であることから、「有効集水半径 b を越えた部分からのバーチカル・ドレーンへの流入はない」とし、式(7)の付帯条件は取り除く。また図-3 に示したように、式(4) における平均過剰間隙水圧 \bar{p}_w は要素重心で代表されることから、式(8)における付帯条件も取り除く。このように考えると、基本マクロ・エレメントと遷移マクロ・エレメントの場合分けは不要になり、一般的な空間離散化式への拡張が可能となる。マクロ・エレメントを含む場合の連続式を、式(1)および式(5) を参照して以下のように置く。

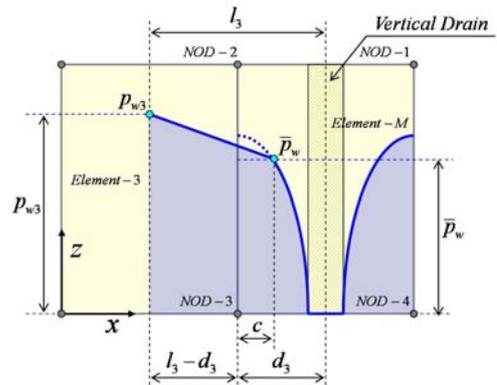


図-4 遷移マクロ・エレメント

$$\dot{\epsilon}_v - \text{div} \mathbf{v} - \dot{q}_{VD} = 0 \quad \text{但し、} \quad \dot{q}_{VD} = \frac{\dot{Q}_{VD}}{dV_e} = \frac{\alpha_{VD}}{dV_e} \cdot \gamma_w h^{me} \quad \dots (9)$$

dV_e はマクロ・エレメント要素の体積である。式(9)を空間離散化すると、以下のように表される。

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{u}}^n - (\mathbf{K}_h + \mathbf{K}_{VD}) \gamma_w \mathbf{h}^m = \dot{\mathbf{Q}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{但し、} \quad \mathbf{K}_v = \int_{V_e} \mathbf{N}_h^T \mathbf{B}_v dV, \quad \mathbf{K}_h = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} \mathbf{B}_h dV$$

$$\mathbf{K}_{VD} = \int_{V_e} \mathbf{N}_h^T \frac{\alpha_{VD}}{dV_e} \mathbf{N}_h dV, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \int_{S_q} \mathbf{N}_{he}^T \dot{q} dS$$

なお、従来のマクロ・エレメント法では、式(5)のようにドレーン長として要素高さ S_z を用いているため、使用できる要素形状が長方形に限定されていたが、ここでは要素の平均高さ \bar{S}_z を用いることで、傾斜した要素にも適用できるようにしている。

4. 拡張マクロ・エレメントを導入したプログラムの検証

ここでは例題として、式(10)に示した空間離散化式を2次のアイソパラメトリック要素を用いたプログラム（変位8節点、水頭4節点で離散化）に適用し、図-5 に示すマクロ・エレメントのモデルに対してプログラムの検証を実施した。図-6 は、解析結果と Barron による理論解との比較である。解析結果は Barron による理論解と一致しており、今回提案した拡張方法が有効であることが確認できる。

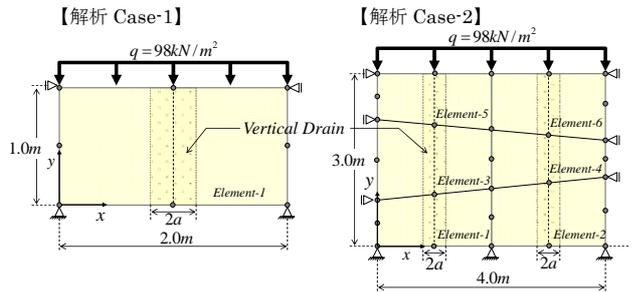


図-5 検証に用いたマクロ・エレメントのモデル

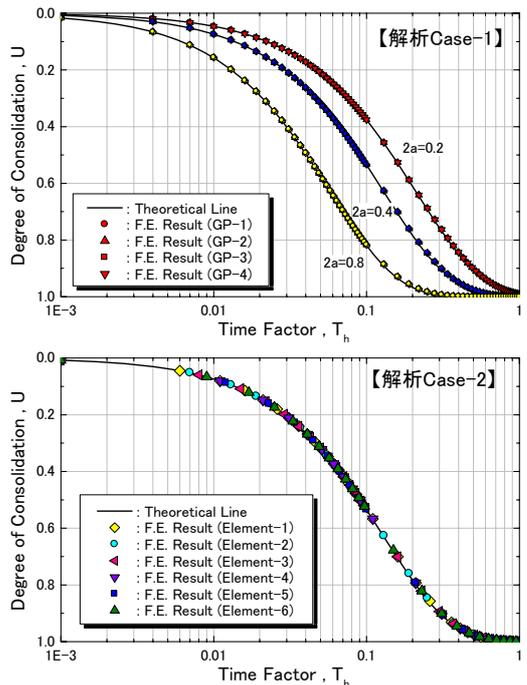


図-6 解析結果と理論解の比較

【参考文献】

- 1) 関口秀雄, 柴田徹, 藤本朗, 山口博久：局部載荷を受けるバーチカル・ドレーン打設地盤の変形解析, 第31回土質工学会シンポジウム発表論文集, pp.111-116, 1986.
- 2) 竹山智英, 青木孝憲, 荒井亜希, 太田英樹：第43回地盤工学研究発表会, pp.887-888, 2008.
- 3) 赤井浩一, 田村武：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, No.269, pp.95-104, 1978.
- 4) 平田昌史, 藤山哲雄, 竹山智英, 飯塚敦, 太田秀樹：赤井・田村(1978)による水頭の空間離散化手法の拡張と適用限界, 第44回地盤工学研究発表会(投稿中), 2009.