

## 異方性材料のモール・クーロン基準

東京都 正会員 ○木村 禪  
 首都大学東京 正会員 吉嶺 充俊

## 1. 目的

地盤材料の破壊基準あるいは降伏基準には、クーロン基準、すなわち $\tau = R\sigma + C$ を基礎としているものが多い。ここで、空間座標軸  $x, y, z$  に対する直応力成分 $\sigma$ の方向余弦（圧縮を正とした基準面の方向余弦）を  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ 、せん断応力成分 $\tau$ の方向余弦を  $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$  とすれば、クーロン基準は  $s_i t_j \sigma_{ij} = R s_i s_j \sigma_{ij} + C$  と表される。ただし、 $s_i s_i = 1$ ,  $t_i t_i = 1$ ,  $s_i t_i = 0$  である。等方性材料では $\tau = s_i t_j \sigma_{ij}$  は常に面  $\mathbf{s}$  に関する最大せん断応力成分 $\tau = \{s_i s_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})^2\}^{1/2}$  となるので、基準は強度パラメータ  $R, C$  と面の方向  $\mathbf{s}$  のみの関数となる。そこで、面の方向  $\mathbf{s}$  を様々に選択すると、モール・クーロン基準、トレスカ基準、フォン・ミーゼス基準、松岡・中井基準などの著名な基準を含む様々な3次元的な破壊・降伏基準が得られる<sup>1)</sup>。これらの既往の基準では、その基準面  $\mathbf{s}$  の選択方法の物理的な理由が必ずしも明確でないものが多いが、モール・クーロン基準では「クーロン基準が最初に満たされる面が基準面  $\mathbf{s}$  となる」という極めて妥当かつ明確な基準面の選択理由が存在する。一方、異方性材料では、クーロン基準の強度パラメータ、すなわち $\tau$ と $\sigma$ が作用している面の摩擦比と粘着力は、その面の方向とせん断方向の関数となっており、 $R = R(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ ,  $C = C(\mathbf{s}, \mathbf{t})$  と表されると考えられる。そこで、本研究では異方性を持つ材料のモール・クーロン基準の特性について解析的に考察する。

## 2. 解析対象と解析条件

解析対象として非粘着性物質のみを考え、 $C = 0$  とする。材料は水平方向 ( $x, y$  方向) には等方であり鉛直方向 ( $z$  方向) にのみ異方性を有する直交異方性材料とすれば、 $R = R(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = R(s_z, t_z)$  である。さらに簡単のために面の強度特性は面の方向  $\mathbf{s}$  によってのみ定まり、その面上でのせん断方向  $\mathbf{t}$  にはよらないと仮定すれば、 $R = R(s_z)$  であり、解析対象のクーロン基準の破壊（降伏）関数は  $f = \{s_i s_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})^2\}^{1/2} - R(s_z) s_i s_j \sigma_{ij}$  と書ける。そこで、条件  $s_i s_i = 1$  のもとで  $\partial f / \partial s_x = \partial f / \partial s_y = \partial f / \partial s_z = 0$  とおいて  $f$  を最大にする  $\mathbf{s}$  を  $\sigma_{ij}$  の関数として表せば、モール・クーロン基準の破壊（降伏）関数  $f$  が求まることになる。しかし、 $R(s_z)$  が相当に簡単な関数であっても  $f$  を  $\sigma_{ij}$  の関数として具体的に表現することは困難であるので、本研究では数値解析によってモール・クーロン基準  $f = 0$  を満たす応力条件  $\sigma_{ij}$  について考察することにする。

鉛直方向 ( $z$  方向) にのみ異方性を有する材料では水平面 ( $z$  面) に作用するせん断応力成分は1成分だけとしても一般性を失わないので  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 0$  とする。また、一般的な地盤では鉛直面には水平方向のせん断応力成分はほとんど作用しないと考えられるので  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$  とする。すると図1に示す空間に固定された4つの独立な応力成分 ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{zx}$ ) のみを考慮すればよい。応力成分  $\sigma_y$  は主応力に固定され、他の2つの主応力が回転可能な面は  $z$ - $x$  面となる。図1のように  $z$  軸,  $x$  軸から  $\alpha$  だけ傾いた主応力を  $\sigma_{z-\alpha}$ ,  $\sigma_{x-\alpha}$  とする。このような応力条件のもと、3主応力  $\sigma_{z-\alpha}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{x-\alpha}$  を軸とする  $\pi$  平面上で原点から放射線状に単調載荷する応力経路を考え、微小な載荷段階毎に全ての方向の面 ( $-1 \leq s_i \leq 1$ ,  $s_i s_i = 1$  を満たす全ての方向余弦成分の組み合わせ) に関するクーロン基準関数  $f = \{s_i s_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})^2\}^{1/2} - R(s_z) s_i s_j \sigma_{ij}$  を計算し、最初に  $f = 0$  が満たされるときの応力成分  $\sigma_{ij}$  の組み合わせをモール・クーロン基準として特定した。

$R(s_z)$  は材料の強度異方性を表す関数としてどのようにでも設定できるが、まずは最も単純な図2に示すような強度パラメータ  $R(s_z)$  を設定した。すなわち、水平面の摩擦比  $R(s_z = \pm 1)$  は最小、鉛直面の摩擦比  $R(s_z = 0)$  は最大とし、鉛直面からある傾きを持つ面の  $R$  はその面の  $s_z$  に比例して変化するような構造異方性を仮定した。

キーワード 異方性, せん断強度, モール・クーロン基準

連絡先 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 首都大学東京 大学院都市環境科学研究科 TEL 042-677-2773

### 3. 解析結果

図2に示す2種類の摩擦比  $R(s_z)$  を設定して異方性の大きさが異なる材料を仮定し、モール・クーロン基準の数値解析を行った結果を示す。図3, 4はそれぞれ異方性が小さい材料, 大きい材料に関して主応力軸方向角  $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  についての結果を  $\pi$  平面上に示したものである。図3をみると, 異方性が小さい材料では,  $\alpha$  の値によらず破壊(降伏)応力条件がほぼ等しく, 等方性材料のモール・クーロン基準に非常に近い特徴が表れている。一方, 図4をみると, 異方性が大きい材料では, 主応力方向により破壊(降伏)条件が大きく異なっている。また, 両者を比較すると, 平均的な摩擦比が同一であっても, 異方性が大きいと弱面の摩擦比が支配的となり, 全体として破壊(降伏)応力レベルが低下することがわかる。さらに,  $\pi$  平面上の応力基準が丸みを帯びており, 異方性材料のモール・クーロン基準は中間主応力の影響を受けることがわかる。

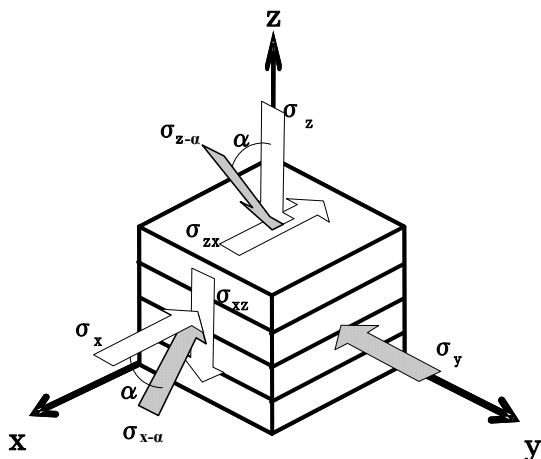


図1 直交異方性材料に働く応力成分

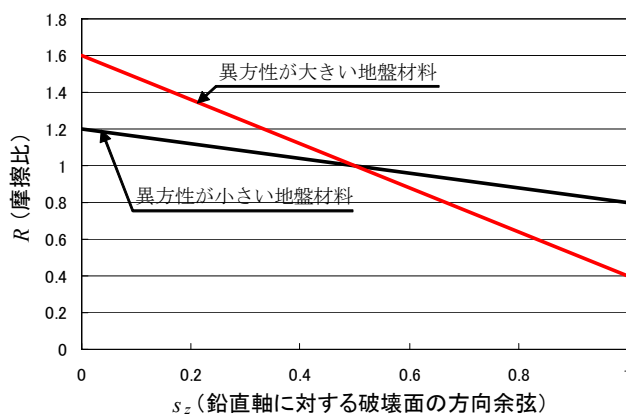


図2 異方性材料の強度パラメータ  $R(s_z)$

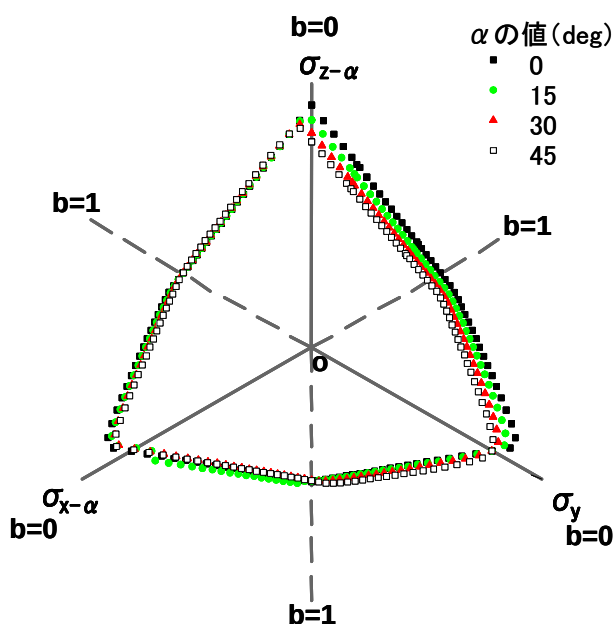


図3 異方性が小さい材料の破壊基準

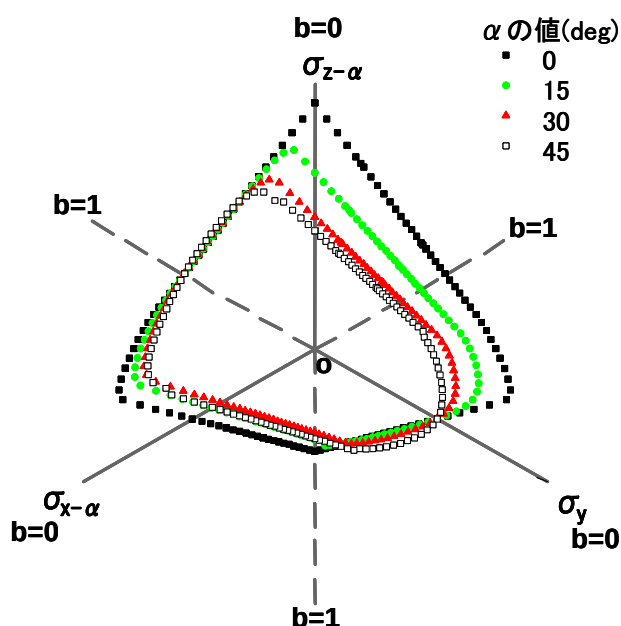


図4 異方性が大きい材料の破壊基準

### 参考文献

- 1) Generalized Coulomb's Criterion for 3-dimensional stress conditions, *Soils and Foundations*, 46(2), 259-266, 2006.