区間内ハイドログラフが存在する場合の浅水流方程式による上下流端条件の再現

京都大学大学院工学研究科　学生会員　○柴山　慶行
京都大学大学院工学研究科　正会員　細田　尚
京都大学大学院工学研究科　正会員　音田　慎一郎

１．はじめに

河川洪水流等の数値計算を行う場合，通常，上下流端の境界条件が 2 つ必要となる．しかし，設定する対象領域によっては，水位や流量の観測が行われておらず，境界条件が存在しない場合がある．本研究では，上下流端の境界条件が存在せず，その間にある一点のみのハイドログラフが存在する場合を想定し，特性曲線法を用いて上下流端の境界値を再現することを目的とし，摂動解を用いて理論的に考察したものである．

２．上下流端条件の再現に関する基礎理論

基礎式には以下の 2 式で構成される浅水流方程式を用いる．

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0 \tag{1}$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここに，t：時間，x：空間座標，h：水深，u：水深平均流速，g：重力加速度である．

水深，平均流速を以下のように表し，摂動法により解を求める．

$$h=h_0+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 h_2 \tag{3}$$

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2 \tag{4}$$

式(3)，(4)を式(1)，(2)に代入しε，ε^2 に関して整理すると以下の式が得られる．

O(ε):

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}+h_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=0 \tag{5a}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+g\frac{\partial h_1}{\partial x}=0 \tag{5b}$$

O(ε^2):

$$\frac{\partial h_2}{\partial t}+h_0\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\frac{\partial h_1 u_1}{\partial x} \tag{6a}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+g\frac{\partial h_2}{\partial x}=-u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{6b}$$

特性曲線法を用いることで式(5)から 1 次の関係について以下の式が導かれる．

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{gh_0}\ \text{で}\ h_1\pm\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_1=\text{const.} \tag{7}$$

ここで，流れは常流とし，上流端，下流端の 1 次の解については**図 1** を参考に次のように仮定する．

$$h_{1A}=\alpha_{1u}t_A \tag{8a}$$

$$h_{1B}=\alpha_{1d}t_B \tag{8b}$$

このとき，$O_1\to A$ と $O_2\to B$ の特性曲線より A 点，B 点での 1 次の解 u_1 は次のようになる．

$$u_{1A}=\sqrt{\frac{g}{h_0}}\alpha_{1u}t_A \tag{9a}$$

$$u_{1B}=-\sqrt{\frac{g}{h_0}}\alpha_{1d}t_A \tag{9b}$$

式(7)から(9)を用いて $A\to C$ と $B\to C$ の特性曲線を考えることで C 点での 1 次の解が以下のように求められる．

$$h_{1C}=\left(\alpha_{1u}+\alpha_{1d}\right)t_A \tag{10a}$$

$$u_{1C}=\sqrt{\frac{g}{h_0}}\left(\alpha_{1u}-\alpha_{1d}\right)t_A \tag{10b}$$

次に，式(6)より 2 次の h_2，u_2 について以下の関係式が求められる．

$$\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\left(h_2\pm\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)\\&=\frac{\partial h_2}{\partial t}\pm\sqrt{gh_0}\frac{\partial h_2}{\partial x}\pm\sqrt{\frac{h_0}{g}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\pm\sqrt{gh_0}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\\&=-h_1\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_1\frac{\partial h_1}{\partial x}\mp\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{11}$$

ここで $A\to C$ 間を X 点でわけ, その上流側の点を M, 下流側の点を N とし，1 次の解を用いてそれぞれの点での式(11)の値を求める．

キーワード　浅水流方程式，摂動法，上下流端境界条件，区間内ハイドログラフ
連絡先　〒615-8540　京都市西京区京都大学桂 C1-3　京都大学　工学研究科都市社会工学専攻

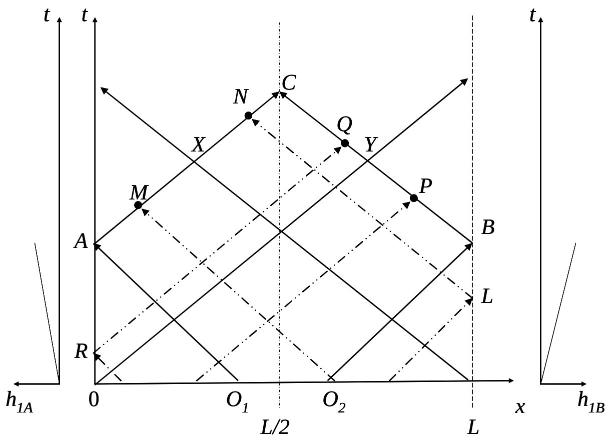

図１　再現法の概要

$$\frac{D}{Dt}\left(h_2+\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_M=3\frac{\alpha_{1u}^2}{h_0}t_A \tag{12a}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(h_2+\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_N=\frac{1}{h_0}\left(\alpha_{1d}t_L+\alpha_{1u}t_A\right)\times\left(\alpha_{1d}+\alpha_{1u}\right)+\frac{1}{h_0}\left(\alpha_{1u}t_A-\alpha_{1d}t_L\right)2\alpha_{1u} \tag{12b}$$

同様に $B \to C$ 間を Y 点でわけ，式(11)での P，Q 点の値を求める．

$$\frac{D}{Dt}\left(h_2-\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_P=3\frac{\alpha_{1d}^2}{h_0}t_A \tag{13a}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(h_2-\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_Q=\frac{1}{h_0}\left(\alpha_{1u}t_R+\alpha_{1d}t_A\right)\times\left(\alpha_{1d}+\alpha_{1u}\right)+\frac{1}{h_0}\left(\alpha_{1d}t_B-\alpha_{1u}t_R\right)2\alpha_{1d} \tag{13b}$$

なお，A 点，B 点での 2 次の解は $O_1 \to A$ と $O_2 \to B$ の特性曲線より以下のように導かれる．

$$h_{2A}=0 \tag{14a}$$

$$u_{2A}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{h_0}}\frac{\alpha_{1u}^2}{h_0}t_A^2 \tag{14b}$$

$$h_{2B}=0 \tag{15a}$$

$$u_{2B}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{h_0}}\frac{\alpha_{1d}^2}{h_0}t_A^2 \tag{15b}$$

式(12a)を A から X 区間で, 式(12b)を X から C 区間で積分し，C 点での特性量を求めると以下のようになる．なお，式(12b)中の t_L は式(17)で表される．

$$\left(h_2+\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_C=\frac{3}{2}\frac{\alpha_{1u}^2L}{h_0\sqrt{gh_0}}t_A+\frac{1}{4}\frac{t_A^2}{h_0}\left(-\alpha_{1u}^2+\alpha_{iu}\alpha_{id}+\alpha_{1d}^2\right) \tag{16}$$

$$t_L=2t_N-t_A-\frac{L}{\sqrt{gh_0}} \tag{17}$$

同様にして式(13a)を B から Y 区間で，式(13b)を Y から C 区間で積分し，C 点での特性量を求めると次のようになる．ただし，式(13b)中の t_R は式(19)で表される．

$$\left(h_2-\sqrt{\frac{h_0}{g}}u_2\right)_C=\frac{3}{2}\frac{\alpha_{1u}^2L}{h_0\sqrt{gh_0}}t_A+\frac{1}{4}\frac{t_A^2}{h_0}\left(\alpha_{1u}^2+\alpha_{iu}\alpha_{id}-\alpha_{1d}^2\right) \tag{18}$$

$$t_R=2t_Q-t_A-\frac{L}{\sqrt{gh_0}} \tag{19}$$

したがって，C 点での h_{2C} が以下のように得られる．

$$h_{2C}=\frac{3}{4}\frac{Lt_A}{h_0\sqrt{gh_0}}\left(\alpha_{1u}^2+\alpha_{1d}^2\right)+\frac{t_A^2}{4h_0}\alpha_{1u}\alpha_{1d} \tag{20}$$

式(10a)，(20)を式(3)に代入すると，C 点での水深は以下のように表される．

$$h\big|_C=h_0+\varepsilon\left(\alpha_{1u}+\alpha_{1d}\right)t_A+\varepsilon^2\left\{\frac{t_A^2}{4h_0}\alpha_{1u}\alpha_{1d}+\frac{3}{4}\frac{Lt_A}{h_0\sqrt{gh_0}}\left(\alpha_{1u}^2+\alpha_{1d}^2\right)\right\} \tag{21a}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_C=\varepsilon\left(\alpha_{1u}+\alpha_{1d}\right)+\varepsilon^2\left\{\frac{t_A}{2h_0}\alpha_{1u}\alpha_{1d}+\frac{3}{4}\frac{L}{h_0\sqrt{gh_0}}\left(\alpha_{1u}^2+\alpha_{1d}^2\right)\right\} \tag{21b}$$

C 点は観測点であり C 点での h_C，dh_C/dt は既知である. 上式からわかるようにεの 1 次だけでは h_C, dh_C/dt から上下流端の水深の係数であるα_{1u}, α_{1d} を求めることができないが, 2 次まで考慮すると例えばα_{1u} は h_C, dh_C/dt で以下のように表記できることがわかる．

$$\varepsilon^4\left(\frac{3Lt_A^4}{4h_0\sqrt{gh_0}}\right)\alpha_{1u}^4+\varepsilon^3t_A^4\alpha_{1u}^3+\varepsilon^2t_A^4\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_C\alpha_{1u}^2+\varepsilon\left\{4h_0t_A^2\left(h_0-h_C+\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_C t_A\right)\right\}\alpha_{1u}+\frac{12Lh_0}{\sqrt{gh_0}}\left(h_0-h_C+\left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_C t_A\right)^2=0 \tag{22}$$

従って，C 点でのハイドログラフが分かっている場合，全ての場合についてではないが，上下流端の境界条件が再現できることが理論的に証明される．

３．おわりに

本研究では，区間内ハイドログラフが存在する場合の上下流端境界条件の再現手法について理論的に考察した．今後，実河川での洪水流における境界条件の再現について検討したい．