

### 3次元 Enriched Free Mesh Method の開発及び性能評価

琉球大学 学生会員 ○木村 隆  
 琉球大学 正会員 松原 仁  
 琉球大学 正会員 伊良波繁雄

#### 1. 目的

フリーメッシュ法(FMM)は、有限要素法における全体メッシュ生成の労力の軽減化を目的として開発されたNode by Node型の解析手法である。本手法では、節点に接続している要素群(局所パッチと呼ぶ)を節点ごとに作成し、同時に剛性行列を作成することで全体メッシュ生成に係る労力を低減している。しかしながら、局所パッチ生成アルゴリズムの制約により、中間節点を有するような高精度要素の使用は困難であるため、対象とする問題によっては解析精度の問題が指摘されてきた。以上のような背景のもと、Yagawa and Matsubaraは要素上では変位場を仮定し、局所パッチ上では応力場またはひずみ場を仮定するEnriched Free Mesh Method(EFMM)を提案している<sup>(1)(2)</sup>。現在までに、2次元領域における弾性力学問題や破壊力学問題に対しては、有限要素法(FEM)よりも高い精度の解が得られている。しかしながら、3次元領域においては検証例がなく、3次元的な複雑形状を有するような問題への適応性が懸念されていた。そこで本研究では、EFMMを3次元へと拡張定式化し、3次元弾性力学問題における本手法の妥当性を検討する。

#### 2. Enriched Free Mesh Method

FMMでは、節点ごとに局所パッチを作成した後、局所パッチを構成する要素ごとに変位場を仮定するため、最終的に得られる解はFEMと等価となる。したがって、局所パッチを作成する意義は、メッシュ生成の煩雑さを軽減することのみに限られる。一方、図-1に示すように変位場を要素ごとに定義し、応力/ひずみ場を局所パッチにて定義されるpatch by patch型の手法である。独立に定義されており、次式に示すHellinger-Reissner<sup>(3)(4)</sup>の原理によって関連付けられる。

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))^T \partial \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \tilde{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ は局所パッチにおける応力場、 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は局所要素における変位場、 $\mathbf{D}$ は応力-ひずみマトリックス、 $\Omega$ は局所パッチ領域、 $\tilde{\mathbf{b}}$ は体積力、 $\tilde{\mathbf{t}}$ は境界 $\Gamma$ 上における表面力である。

また、応力/ひずみ場が特異でない場合を想定すると $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ は中心節点に接続している節点自由度 $\mathbf{a}$ と基底関数 ${}^{\sigma}\mathbf{N}$ を用いて次式で表せる。

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = {}^{\sigma}\mathbf{N} \mathbf{a}, \quad {}^{\sigma}\mathbf{N} = p(\mathbf{x}) [I], \quad p(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y \quad z] \quad (2)$$

ここで、 $[I]$ は $6 \times 6$ の単位行列である。

このとき、剛性は局所パッチごとに評価されるので、本手法はPatch by Patch型の解析手法であると言える。

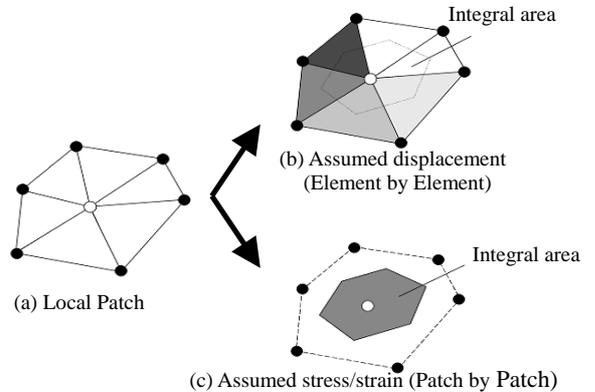


図-1 EFMMの概念図

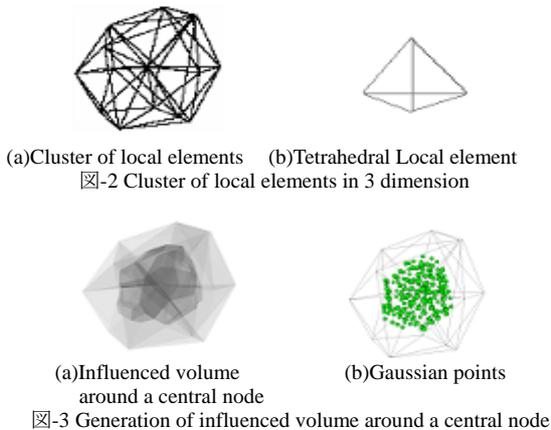
#### 3. ひずみ評価点

EFMMの3次元領域における定式化は2次元領域と同様であるが、局所パッチは図-2に示すような四面体要素群で構成されている。また、節点ごとの積分領域に関しては、中心節点周りにひずみ評価点がある。また、節点ごとの積分領域に関しては、中心節点周りにひずみ評価点を設けることにした。本ひずみ評価点は、中心節点周りの四面体要素ごとに、一時的に作成された六面体領域内にて定義される

キーワード Enriched Free Mesh Method, Free Mesh Method, 3-dimensional analysis, Mixed-type finite element formulation

連絡先 〒903-0213 沖縄県西原町字千原1番地

(図-3(a)). 本領域は任意に仮定できるが, 中心節点を一頂点とすると六面体領域を仮定することで, 六面体内部の Gauss 積分点をひずみ評価点として利用することが可能となる(図-3(b)).



4. 数値解析例

本解析例では, EFMM の基底要素を四面体 1 次要素とし, 応力場は 6 成分ともに完全 1 次多項式で近似する.

4.1 片持ち梁の解析

ここでは, 図-4 で示した集中荷重を受ける片持ち梁の自由端変位についての精度を検証する. 図-5 では, 横軸に自由度, 縦軸に自由端変位を厳密解で正規化した値をプロットした. 比較のため四面体・六面体要素分割を用いた FEM の解も同時に示した. 四面体要素分割を用いた FEM の解よりも少ない自由度で厳密解に達している.

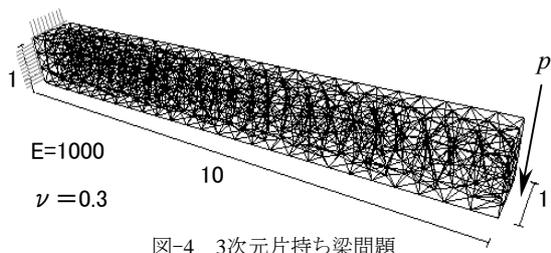


図-4 3次元片持ち梁問題

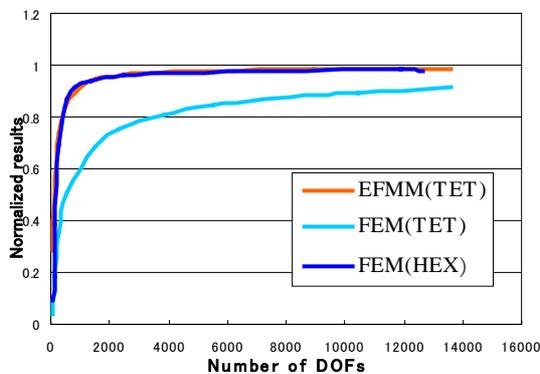


図-5 片持ち梁の精度結果

4.2 薄板の解析

図-6 で示した全周固定の正方形板に等分布荷重を与えたものに対する変位についての精度を検証する. 片持ち梁

と同様に比較を行った. 四面体要素分割を用いた FEM の解より約 2.5 倍も高い精度を示した. 一方, 六面体要素分割を用いた FEM の解より高い精度が得られなかった. これは, ロッキングの影響だと考えられる.

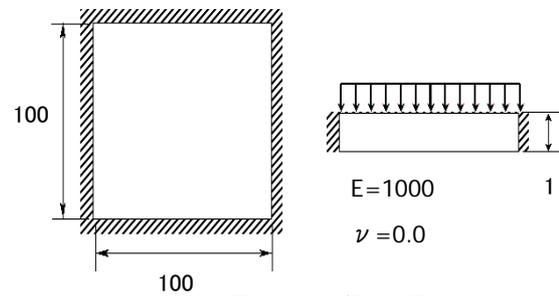


図-6 3次元薄板問題

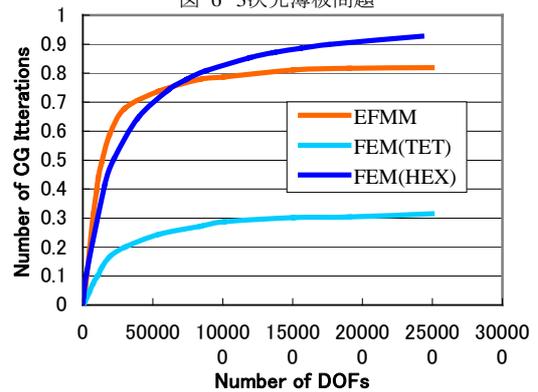


図-7 薄板の精度結果

5. 結論

本研究では, EFMM を 3 次元定式化し, 片持ち梁及び薄板の曲げ問題にて検証した. その結果, EFMM の解の精度は, FEM よりも高いことが示され, 特に, 片持ち梁では六面体要素分割を用いた FEM の解とほぼ同等の精度が得られている. したがって, EFMM は 3 次元領域においても有効であると考えられる. しかしながら, 薄板の曲げ問題においてロッキングの問題が生じており, 今後, 解決していく必要がある.

参考文献

- (1)G. Yagawa and H. Matsubara: Enriched Free Mesh Method: An accuracy improvement for Node-based FEM, Springer, in press.
- (2)松原仁, 矢川元基: Patch by Patch 型混合法における基底関数の応力とその精度, 応力学会論文集, Vol.10, pp.201-209, 2007.
- (3)O.C ツィエンキーヴィッツ, R.L テイラー(矢川元基訳): マトリックス有限要素法 I, 科学技術, 1996.
- (4)鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 倍風館, 1972.