

表面せん断応力の影響を考慮した厚板の曲げ解析

足利工業大学 正会員 ○末武 義崇

1. まえがき

横せん断変形の影響を考慮した厚板の曲げ解析については、従来から多くの研究報告がなされている。特に、Reissner-Mindlin 理論は、平板の曲げ解析における古典理論として著名である。しかしながら、板中央面の伸縮や面内応力は常にゼロとなることが仮定されており、解析精度についても問題点が残されている。こうした問題点を解決するために、平板解析の高精度化を目的とした高次理論も多く報告されている。筆者も、できる限り低次の変位場を仮定すると共に、板の横荷重に占める物体力および表面力を明確に区別して評価することで、比較的簡明な平板理論が構築できることを明らかにしてきた^{1), 2)}。一方、こうした平板理論の多くは、荷重として横荷重のみを想定したものであり、板上下面における表面せん断応力の影響を考慮する理論は極めて少ない。

本研究では、表面せん断応力の影響を評価し得る平板理論の定式化を試みた。その際、既往の平板理論²⁾と同様に、できる限り低次の変位場を仮定すると共に、板上下面におけるせん断応力の境界条件をあらかじめ満足するような変位場を導入した。構築した平板理論を横荷重と同時に表面せん断応力の作用を受ける厚板の解析に適用し、変位や応力の板厚方向分布の解析に対する有用性について検討を行った。

2. 表面せん断応力を加味した平板理論

本研究では、板上下面におけるせん断応力の境界条件をあらかじめ満足するような変位場として、面内変位 U および V に関して3次の次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} U &= u - \psi_x z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) z^3 + \frac{1}{2G} \left\{ \bar{q}_2 \left(z + \frac{z^2}{t} \right) - \bar{q}_1 \left(z - \frac{z^2}{t} \right) \right\} \\ V &= v - \psi_y z - \frac{4}{3t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) z^3 + \frac{1}{2G} \left\{ \bar{r}_2 \left(z + \frac{z^2}{t} \right) - \bar{r}_1 \left(z - \frac{z^2}{t} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

たわみ W に関しては、板厚方向に一定 ($W = w$) とする。座標系は、板中央面に $x-y$ 平面を設定し、その法線方向に z 軸を設けることとした。式(1)において、 (u, v, w) は板中央面における (x, y, z) 3方向の変位、 ψ_x および ψ_y は x および y 方向の回転角、 t は板厚を表している。また、 \bar{q}_1 および \bar{q}_2 は、図1に示したように、上面 ($z = -t/2$) および下面 ($z = t/2$) に作用する x 方向の表面せん断応力、 \bar{r}_1 および \bar{r}_2 は上下面 ($z = \mp t/2$) に作用する y 方向の表面せん断応力である。式(1)は、板上下面におけるせん断応力の境界条件をあらかじめ満足している。既往の平板理論²⁾と同様に、図1の荷重構成に対応した力学的境界条件を満足するように垂直応力 σ_z を決定し、平板理論の基礎式を誘導すれば、次式が得られる。

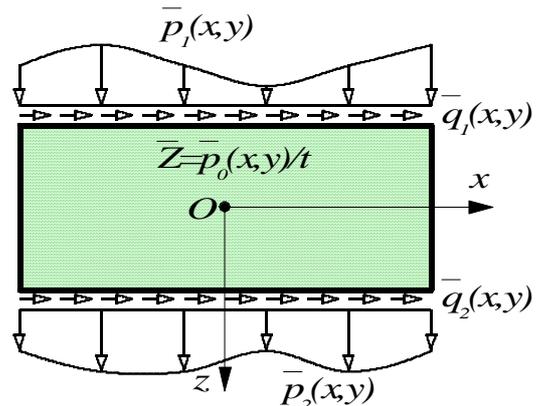


図1. 荷重の構成

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\nu}{4G} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \frac{t}{24G} \left[\{ (1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \} (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) + \frac{1+3\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \right] \\ \nabla^4 w &= \frac{1}{D} [\bar{p}_0 + \bar{p}_1 + \bar{p}_2 - \frac{t^2}{6(1-\nu)} \nabla^2 \{ \frac{12-\nu}{10} \bar{p}_0 + \frac{3}{5} (2-\nu) (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \} - \frac{t^3}{120} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 \{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q}_2 - \bar{q}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \}] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

なお、 y 方向の面内変位 v および、回転角 ψ_x および ψ_y に関する基礎式は省略した。ここで、 G はせん断弾性係数、 ν は Poisson 比、 D は板の曲げ剛性である。式(2)における下線部は、板上下面の表面せん断応力をキーワード: 厚板, 横せん断変形, 表面せん断力, 面内変形挙動, 板厚方向垂直応力, 荷重構成

評価する項であり、表面せん断応力がゼロの場合は、既往の平板理論²⁾と全く一致した理論になる。

3. 解析モデル

本研究では、周辺単純支持された矩形平板を解析対象とする。図2に解析モデルと設定した座標系を示す。解析モデルの形状は正方形とし、幅厚比 $\theta = t/a$ を $\theta = 0.5$ として解析を行った。材料定数については、Poisson 比を $\nu = 0.3$ とした。横荷重については、板上面 ($z = -t/2$) に全面等分布荷重が作用するものとした。荷重の大きさについては、無次元化荷重 $\bar{p}_1^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\}\bar{p}_1$ の値で $\bar{p}_1 = 1.0$ とした。また、表面せん断応力については、やはり板上面全体に等分布する x 方向のせん断応力と考え、横荷重との比を $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = \pm 0.5$ とした。数値計算に当たっては Fourier 解析を実施し、図2に示した板厚方向の線分 AA' ($x = a/4, y = b/4$) に沿った面内変位分布および横せん断応力分布を求めた。

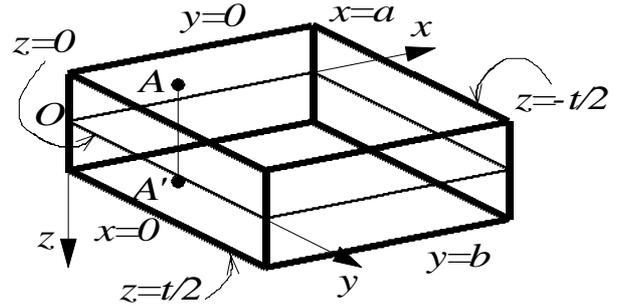


図2. 解析モデルおよび座標系

表面せん断力を考慮した場合は、面内変位 u および v の三角級数展開と、表面せん断力の Fourier 級数展開を同じ形の級数で展開することができない。このため、単純な係数比較によって未定係数を決定することは困難である。詳細は省略するが、本研究では Galerkin 法を用いて未定係数を決定した。

4. 数値計算結果

解析結果の一部を図3および図4に示す。図3は、図2の線分 AA' に沿った面内変位 U の分布、図4は横せん断応力の分布を表している。両図とも、縦軸には無次元化座標 $\zeta = z/t$ をとり、図の上下が板の上下面にそれぞれ対応している。また、横軸については、図3では無次元化変位 $\alpha = u/a$ 、図4では無次元化せん断応力 $\tau^* \equiv \{(1-2\nu)/2G\}\tau_{xz}$ をとった。両図とも、荷重比 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = 0$ の場合を丸のプロット、荷重比 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = 0.5$ の場合を三角のプロット、荷重比 $\bar{q}_1/\bar{p}_1 = -0.5$ の場合を四角のプロットでそれぞれ示した。

図3から明らかなように、上面に分布する表面せん断応力の存在によって、板厚方向の面内変位分布が表面せん断応力と同じ方向に移動している様子が見られる。また、図4に示した横せん断応力の分布についても、板上面において、表面せん断に相当する応力の分だけズレを生ずるような分布形状が得られている。

5. まとめ

表面せん断応力の影響を考慮しうる平板理論を構築した。面内変位および横せん断応力の板厚方向分布に関する数値計算結果から、板上面全体に等分布するような表面せん断応力が作用した場合には、定性的に妥当な解が得られている。今後は、三次元解析結果や数値解析結果などとの比較を通じ、定量的な解の妥当性を検証していく必要がある。また、解析モデルの幅厚比、横荷重と表面せん断応力との比など、各種パラメータを変化させた場合についても検討する予定である。さらに、横荷重の構成を変化させた場合の表面せん断力の影響についても検討する。

参考文献：1) 末武：厚板の曲げ解析における横荷重評価の影響，応用力学論文集，Vol.8, No.1, pp.25-32, 2005.
 2) 末武：横荷重の影響を考慮した厚板の変形および応力分布解析，応用力学論文集，Vol.10, No.1, pp.47-57, 2007.

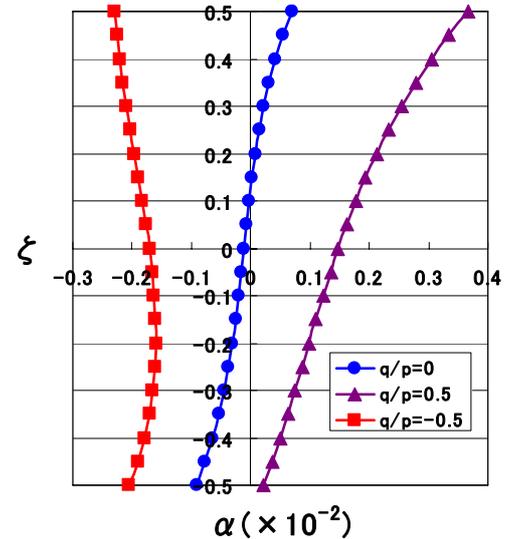


図3. 面内変位分布

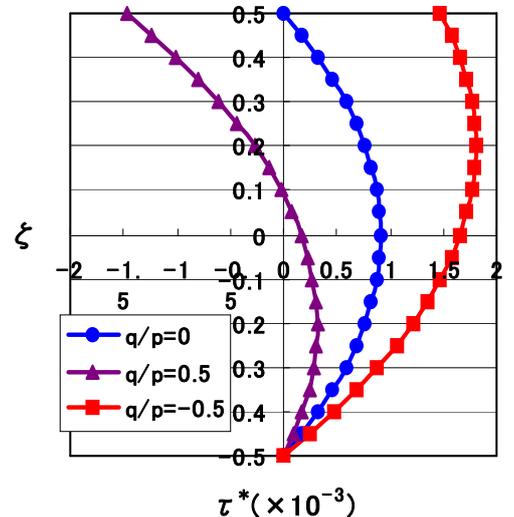


図4. 横せん断応力分布