

## 級数解法による Pasternak 基礎にある厚肉平板の 3 次元応力解析

熊本大学	工学部社会環境工学科	学生会員	○多田 裕治
大分工業高等専門学校	都市システム工学科	正会員	名木野 晴暢
足利工業大学	都市環境工学科	正会員	末武 義崇
大同大学	都市環境デザイン学科	正会員	水澤 富作
北海道大学大学院	工学研究科北方圏環境政策工学専攻	フェロー会員	三上 隆

### 1. まえがき

基礎構造，スラブ軌道や舗装道路などは，地盤上にある平板構造要素の問題として取り扱われる．近年，構造物の大型化にともない，比較的厚肉な平板が構造要素として用いられるため，地盤上にある平板構造要素の正確かつ詳細な静力学的特性(変位及び応力分布特性)を把握することが，構造設計において必要不可欠であり，また，実務設計における設計精度の向上やコスト削減の観点からも重要になってくる．

厚肉平板の曲げ問題では，板厚の増大に伴い，面外せん断変形の影響や板厚方向の応力一ひずみ成分が無視できなくなる．また，近似理論(平板理論)では，平板上面での荷重載荷や平板下面での地盤接触などの局所的な影響を考慮することができない．したがって，地盤上にある平板のより正確な静力学的特性を把握するためには，板厚方向の影響を厳密に考慮することができる 3 次元弾性論に基づかなければならない．

本論文では，著者ら<sup>1)</sup>が誘導した Pasternak 基礎にある直方弾性体の板厚方向に厳密な級数解を用いて，3次元応力解析を実施し，平板理論では言及できない Pasternak 基礎にある厚肉平板の変位及び応力分布特性に与える平板厚と 2 つの独立した地盤反力係数の影響を明らかにすることを目的としている．

### 2. 基礎方程式及び境界条件

図-1 には，Pasternak 基礎上の平板，座標系および変位の定義が示してある．Pasternak 基礎は，面外せん断変形にのみ抵抗するせん断層  $k_2$  を導入し，個々の Winkler 基礎  $k_1$  の独立性を奪った弾性基礎モデルである．ここで，3次元弾性論に従う等質かつ等方的な平板は，微小変形かつ線形弾性であり，平板上面で等分布荷重を受け，下面で Pasternak 基礎モデルと滑ら

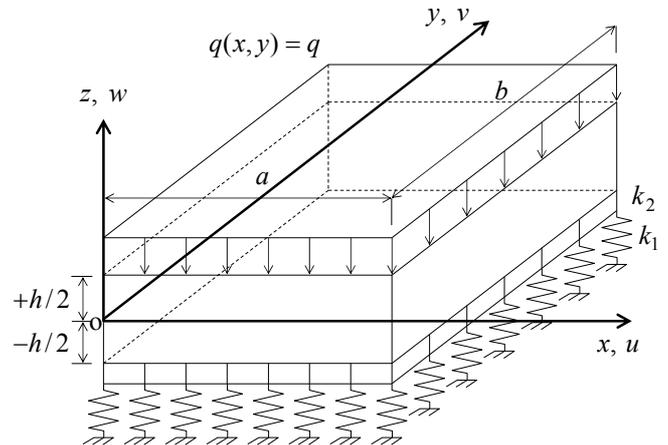


図-1 Pasternak 基礎上の平板，座標系及び変位の定義

かに完全密着しているものとする．

直方弾性体の基礎方程式は，次式のように表される．

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, & \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0; & \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで， $\nabla^2$  は Laplacian， $e$  は体積ひずみであり， $\nu$  はポアソン比である．また，平板の下面及び上面での境界条件は，次式で与えられる．

$$\sigma_z = k_1 w - k_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ at } z = -h/2 \quad (2)$$

$$\sigma_z = -q(x, y) = -q, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ at } z = +h/2 \quad (3)$$

ただし， $q$  は等分布荷重強度であり， $k_1$  と  $k_2$  は，それぞれ，Winkler 基礎及びせん断層の地盤反力係数である．

### 3. 数値計算例及び考察

ここでは，Pasternak 基礎(以下，弾性基礎)上にある厚肉平板の面外たわみ  $w$ ，応力  $\sigma_x$  及び面外せん断応力  $\tau_{yz}$  の分布特性に与える地盤反力係数の影響について検討する．数値計算例では，厚肉正方形平板( $h/a = 0.5$ ，

$b/a=1$ )を取り扱い, ポアソン比 $\nu=0.3$ とし, 次式で定義される無次元地盤反力係数 $\Phi_1, \Phi_2$ を用いた.

$$\Phi_1 = k_1 a^4 / D, \quad \Phi_2 = k_2 a^2 / D \quad (4)$$

ただし,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ は, 平板の曲げ剛性である. また, 参考までに, 弾性基礎に接していない解析結果(No foundation)を実線で示した.

図-2には, Pasternak 基礎にある厚肉平板の  $x$  軸方向( $y/b=0.5$ )の平板上面(Top,  $z=h/2$ ), 中央面(Middle,  $z=0$ )及び下面(Bottom,  $z=-h/2$ )における  $w$  分布が示してある. ここで,  $\Phi_1=100, \Phi_2=10$  に設定している. これより, 厚肉平板では, 弾性基礎の有無に係わらず, 面の位置によって  $w$  分布に相違が見られ, 特に, 平板下面における Pasternak 基礎との局所的な接触の影響により, 下面での変位量がかなり小さくなっている.

図-3には, Pasternak 基礎にある厚肉平板の中央点での  $z$  方向の $\sigma_x$  分布に与える $\Phi_2$ の影響が示してある. ここで,  $\Phi_1$ は 100 に設定し,  $\Phi_2$ を 0 から 50 まで変化させている. これより, 弾性基礎にある厚肉平板の $\sigma_x$  分布は, 弾性基礎の有無に係わらず, 曲線的かつ非対称であり, 中央面を通過していない. また,  $\Phi_2$ の増大に伴い, 平板下面での引張応力の値は小さくなり, 伸縮が零になる面が中央面から下方に偏心し, 圧縮応力が支配的になっている. これは, 荷重上面載荷の影響及び平板下面での Pasternak 基礎との接触による局所的な影響によるものだと考えられる.

図-4には, Pasternak 基礎にある厚肉平板の偏心点での  $z$  方向の $\tau_{yz}$  分布に与える $\Phi_2$ の影響が示してある. これより, 弾性基礎にある厚肉平板の $\tau_{yz}$  分布は放物線形状であるが,  $\Phi_2$ の増大に伴い, 最大の $\tau_{yz}$ の発生位置が中央面の下方へ偏心し,  $\tau_{yz}$ の分布形状はやや複雑になっている. また, 最大 $\tau_{yz}$ の値は, 最大 $\sigma_x$ の値の約 1 ~ 2 割程度であり, 面外せん断変形の影響が現れていることが確認できる.

4. まとめ

本論文では, Pasternak 基礎にある厚肉平板の 3 次元応力解析を実施し, 弾性基礎にある厚肉平板の軸方向の  $w$  分布と板厚方向の $\sigma_x$ 及び $\tau_{yz}$ 分布は, 荷重上面載荷及び平板下面での弾性基礎接触による局所的な影響を大きく受けることを定量的に明らかにした. また, 本論文の結果は, 簡便, 簡易かつ高精度な平板理論の構築<sup>2)</sup>や有限要素解などの数値解の参照解にも活用

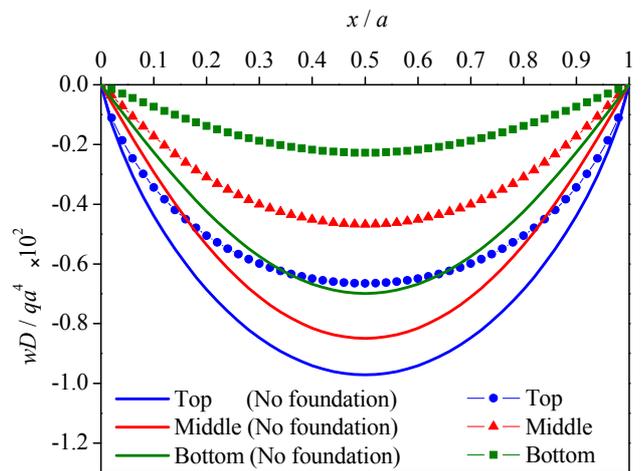


図-2 厚肉平板の軸方向の平板上面, 中央面及び下面における  $w$  分布:  $y/b=0.5, \Phi_1=100, \Phi_2=10$

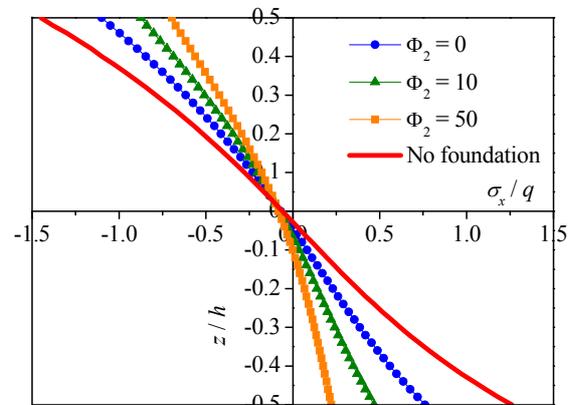


図-3 厚肉平板の中央点での板厚方向の $\sigma_x$  分布に与える $\Phi_2$ の影響:  $x/a = y/b = 0.5, \Phi_1 = 100$

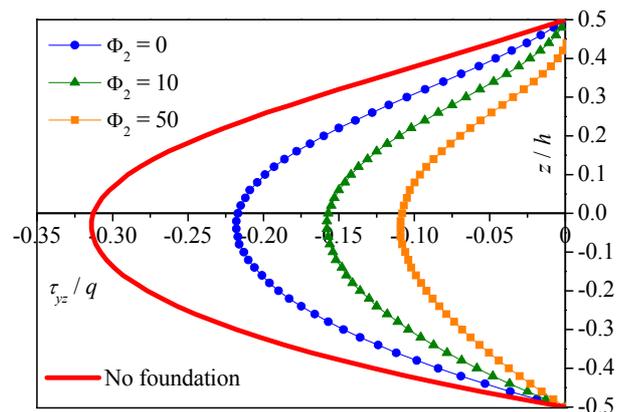


図-4 厚肉平板の偏心点での板厚方向の $\tau_{yz}$  分布に与える $\Phi_2$ の影響:  $x/a = y/b = 0.25, \Phi_1 = 100$

できるため, その果たす役割は大きいと言えよう.

参考文献

- 1) 多田ら: 土木学会西部支部, I-078, pp.155-156, 2009.
- 2) 末武義崇: 応用力学論文集, Vol.10, pp.47-57, 2007.