不均質長方形板の新たなる古典平板理論の構築

大分工業高等専門学校　専攻科機械・環境システム工学専攻　学生会員　○竹 尾 恭 平

豊橋技術科学大学　機械システム工学系　非 会 員　樋 口 理 宏

大分工業高等専門学校　都市システム工学科　正 会 員　名木野晴暢

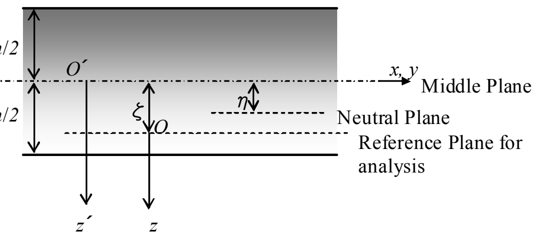
1. まえがき

1980 年代に熱応力緩和の目的で傾斜機能材料 (FGMs: Functionally Graded Materials) の基本概念が発案されて以来, 不均質材料の力学的挙動の解明が継続的に行われてきている．FGMs とは，一方の表面から他方の表面へと材料組成等を変化させ制御することによって要求する機能を発現させる材料であり, その無限の可能性から航空宇宙，機械，生体，土木といった多岐に渡る分野での応用が期待されている．

FGMs は主に平板や膜要素といった形態で生成されるため，平板やシェルの理論に基づく数多くの研究が成されてきた．厚さ方向に不均質性を有する平板要素においては，中央面に対する弾性係数の非対称性により中立面は中央面と一致せず，不均質材料を対象とした古典平板理論では Kirchhoff の仮定における基準面の取り方に複数の手法が存在する．

Morimoto ら[1)]は，縦弾性係数のモーメントが零になる条件により中立面の位置を見出し，中立面を基準とすることにより，極めて簡素化された形で古典平板理論を構築することに成功している．しかし，他の多くの研究者は中央面を基準面とした平板理論に基づき解析を行っており，熱応力問題も相まってその理論体系は複雑化している. そのような流れの中, Chi と Chung[2)] は，中央面を基準面とした古典平板理論に基づき，横荷重を受ける全周単純支持された傾斜機能平板の曲げ変形解析という非常にシンプルな問題を取扱い，曲げ変形が生じた際に，中立面が中央面から移動する事を明示した．すなわち，上記の二つの理論間には何かしらの相関が存在すると考えられる．

そこで本研究では，基準面を任意の位置に解析面として設けた新たなる古典平板理論を提案し，上記の既存理論の関連性及び相違点を数理的に抽出することにより，不均質材料からなる薄肉平板構造要素の理論体系を統一的に再構築することを目的としている．



図−1　不均質長方形板における板厚方向の座標系

2. 不均質平板の理論構築

長さが a, 幅が b, 厚さが h を有する不均質長方形平板において，厚さ方向のみに不均質性を有する場合を考え，不均質平板の物性値である縦弾性係数を板厚方向の座標変数 z' に関する任意の関数 $E(z')$ で表す．ただし，ポアソン比 ν は一定とする．

2.1 支配方程式の導出

図−1 に示すように，中央面に設置した座標系 $o'(x,y,z')$ から距離 ζ 離れた解析面 $(z'=\zeta; z=0)$ と座標系 $o(x,y,z)$ を導入する．この解析面を基準面として Kirchhoff の仮定を置き，板の内部の任意点 (x,y,z) における変位成分 (u',v',w') は，次式のように解析面 $z'=\zeta$ における変位成分 (u,v,w) と z の関数となる．

$$u' = u - z\,w,_x\,,\quad v' = v - z\,w,_y\,,\quad w' = w \tag{1}$$

また，ひずみ−変位関係式および応力−ひずみ関係式は次式で与えられる．

$$\varepsilon_x = u,_x - z\,w,_{xx}\,,\quad \varepsilon_x = v,_y - z\,w,_{yy}\,,\quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u,_y + v,_x) - z\,w,_{xy} \tag{2}$$

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y),\ \sigma_y = \frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y),\quad \sigma_{xy} = \frac{E(z)}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \tag{3}$$

ここで，解析面を基準とした，単位長さあたりの面内合力と合モーメントをそれぞれ次式で定義する．

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}-\zeta}^{\frac{h}{2}-\zeta} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})\mathrm{d}z\ ,$$

キーワード　古典平板理論，不均質材料，傾斜機能材料，曲げ変形解析
連絡先　〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地　大分工業高等専門学校　TEL: 097-552-7691

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}-\zeta}^{\frac{h}{2}-\zeta} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z \, \mathrm{d}z \tag{4}$$

式(2), (3)を式(4)に代入すると, 次式のように表される.

$$\begin{aligned} N_x &= A(u_{,x} + \nu v_{,y}) - B(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ N_y &= A(\nu u_{,x} + v_{,y}) - B(\nu w_{,xx} + w_{,yy}) \\ N_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} A(u_{,x} + v_{,y}) - (1-\nu) B w_{,xy} \\ M_x &= B(u_{,x} + \nu v_{,y}) - D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ M_y &= B(\nu u_{,x} + v_{,y}) - D(\nu w_{,xx} + w_{,yy}) \\ M_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} B(u_{,x} + v_{,y}) - (1-\nu) D w_{,xy} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで, A, B, D は解析面を基準とした引張り剛性, カップリング剛性, 曲げ剛性であり, 次式で定義される.

$$(A, B, D) = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}-\zeta}^{\frac{h}{2}-\zeta} (1, z, z^2) \, E(z) \, \mathrm{d}z \tag{6}$$

紙面の都合上, 詳細は割愛するが, 以上の構成方程式をもとに, 力およびモーメントのつり合いから平衡方程式を導き, たわみ w に関する支配方程式を導出すると, 解析面のとり方に依存せず次式のように統一表示することができる.

$$D_\eta \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p \, ; \quad D_\eta = D - \frac{B^2}{A} \tag{7}$$

ただし, p は横荷重, D_η は中立面を基準とした曲げ剛性であり, 中立面を回転中心として曲げ変形が生じることを意味する.

2.2 境界条件

たわみ w に関する支配方程式(7)に付随する基本的な境界条件を考え, 既存理論の相違点の抽出を行う. ここでは一例として, 全周単純支持条件を取り上げる. 全周単純支持に対するたわみ w に関する境界条件は $x = 0, a$ において次のように与えられる.

(1) 面内自由の場合:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

(2) 面内固定の場合:

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{B}{D}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

すなわち, 面内自由の場合では, 解析面のとり方に依存せず, たわみ w が一意に決定されるが, 面内固定の場合では, 解析面を中立面以外にとると $B \neq 0$ となり, たわみ w だけでなく, 面内変位 u, v も未知変数として取り扱う必要がある.

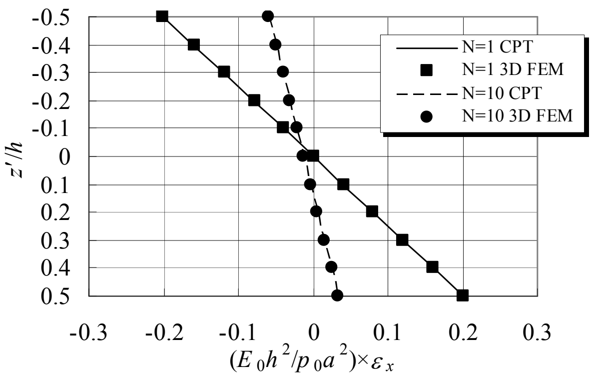


図-2 ひずみ ε_x の板厚方向分布: $h/a = 0.1, b/a = 1$

3. 数値計算例および考察

不均質材料に対する古典平板理論の妥当性を検証する目的で汎用有限要素解析コード Abaqus 6.8-2 による3次元弾性解析を行い, 古典平板理論との比較を行った. 等分布荷重を受ける全周単純支持された不均質平板の曲げ変形問題の計算結果を示す. ここでは, $E(z')$ が線形変化する場合を想定し, $\nu = 0.3$, $b/a = 1$, $h/a = 0.1$ とした. 図-2 に, ひずみ ε_x の板厚方向分布を示す. ここで, N は下面における縦弾性係数と上面の縦弾性係数の比を表す. 板理論では Kirchhoff の仮定を置いているので, ひずみ ε_x は厚さ方向に関して直線分布となり, 3 次元解析の結果もこれによく一致していることがわかる. すなわち, $h/a = 0.1$ 程度であれば, Kirchhoff の仮定は近似的に満足されると言える. また, $N = 10$(不均質)の場合は, $\varepsilon_x = 0$ となる中立面が中央面から下面へと移動している.

4. まとめ

本論文では, Kirchhoff の仮定における基準面を任意の位置に解析面として設け, 不均質平板の微小曲げ変形に関する支配方程式が一意に決定されることを示した. また, 不均質材料に対する古典平板理論の妥当性を確認するために, 横荷重を受ける不均質平板の曲げ変形問題を例に取り, 古典理論に基づく解析と 3 次元解析と結果の比較を行い, Kirchhoff の仮定の妥当性及び中立面の移動を確認することができた.

参考文献

1) Morimoto, Tanigawa and Kawamura: *International Journal of Mechanical Sciences* **48**, pp. 926-937, 2006.
2) Chi and Chung: *International Journal of Solids and Structures* **43**, pp. 3657-3691, 2006.