

弾性基礎にある平板の曲げ問題における 1 次せん断変形理論の適用範囲について

九州大学	工学部地球環境工学科	学生会員	○野中 翔
大分工業高等専門学校	都市システム工学科	正会員	名木野 晴暢
熊本大学	工学部社会環境工学科	学生会員	多田 裕治
足利工業大学	都市環境工学科	正会員	末武 義崇
大同大学	都市環境デザイン学科	正会員	水澤 富作
北海道大学大学院	工学研究科北方圏環境政策工学専攻	フェロー会員	三上 隆

1. まえがき

基礎構造，スラブ軌道や舗装道路等は，地盤上にある平板の問題として取り扱われる．近年，構造技術の進歩にともない，構造物は大型化の傾向にあり，比較的厚肉な平板構造要素が用いられる機会が増えている．

厚肉平板構造要素では，面外せん断変形の影響や板厚方向の応力-ひずみ成分が無視できなくなる．実務設計では，これらの影響を近似的に考慮した簡便な 1 次せん断変形理論である Mindlin 平板理論が用いられているが，近似理論であるが故に，理論の適用限界が生じるという問題点がある．しかしながら，地盤上にある平板の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用限界については，未だ明らかにされていないようである．したがって，地盤-構造関連問題における Mindlin 平板理論の適用範囲を明確にすることは，実務設計者に有益な情報を提供するものであると考えられる．

本論文では，地盤を Winkler 基礎でモデル化した弾性基礎にある平板の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用範囲を明らかにすることを目的としている．

2. 解析モデル及び解析方法

図-1 には，Winkler 基礎にある平板，座標系及び変位方向の定義が示してある．ここで， $a$  は平板の長さ， $b$  は幅， $h$  は厚さであり， $k_1$  は Winkler 基礎の地盤反力係数である．本論文では，周面単純支持平板を取り扱い，平板の上面( $z=+h/2$ )で等分布満載荷重を受け，平板の下面( $z=-h/2$ )で Winkler 基礎と完全密着しているものとする．なお，解析モデルに対応する 3 次元弾性論及び Mindlin 平板理論に基づく級数解は，周面単純支持の境界条件を満足する変位場を 2 重 Fourier 級数で仮定し，支配方程式を厳密に解いて求めた<sup>1)</sup>．

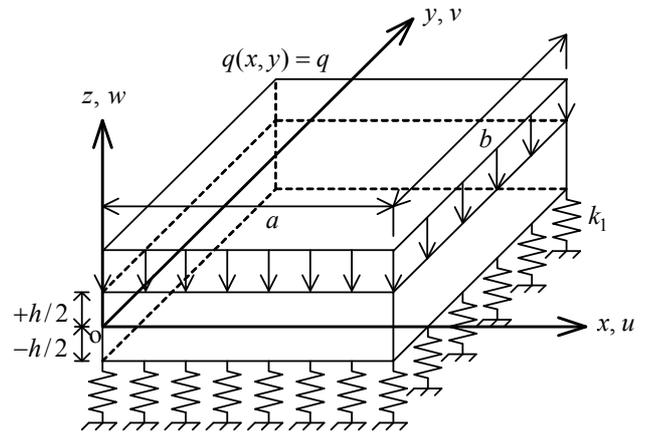


図-1 Winkler 基礎にある平板，座標系及び変位方向

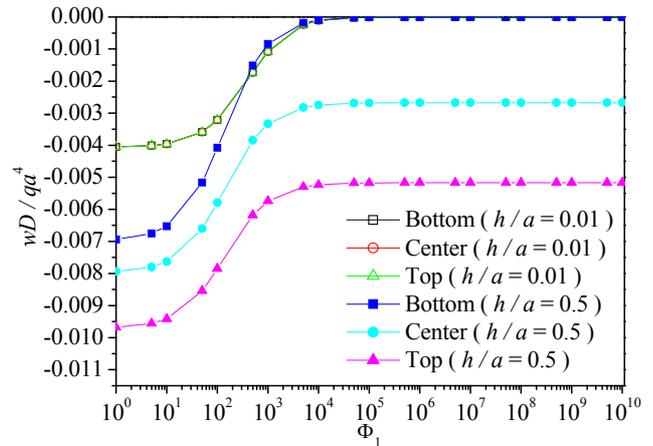


図-2  $w$  と  $\Phi_1$  の及び  $h/a$  の関係 :  $x/a = y/b = 0.5$

3. 数値計算例および考察

ここでは，Winkler 基礎にある平板の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用範囲について検討する．数値計算例では，正方形平板( $b/a = 1$ )を取り扱い，コンクリート構造物を想定してポアソン比  $\nu$  は  $1/6$ ，せん断修正係数  $\kappa = 5/6$  とし，平板の曲げ剛性  $D$  を基準とした無次元地盤反力係数  $\Phi_1 = k_1 a^4 / D$  を用いる．また，3 次元弾性論に基づく解(3-D)と Mindlin 平板理論(MPT)に基づく解の誤差は，次式に基づいて算出した．

$$\text{Error} = \frac{\text{MPT} - 3\text{-D}}{3\text{-D}} \times 100 \text{ [%]} \quad (1)$$

すなわち、正の誤差は構造設計において安全側を意味するが、負の誤差は危険側を意味する。なお、理論誤差を含めて、許容誤差を±10%に設定した。

図-2には、Winkler基礎にある平板の中央点における平板下面(Bottom,  $z/h = -0.5$ )、中央面(Center,  $z/h = 0$ )及び上面(Top,  $z/h = +0.5$ )での面外たわみ  $w$  の値と  $\Phi_1$  及び  $h/a$  の関係が示してある。ここで、 $\Phi_1$  は1から  $10^{10}$  まで変化させ、 $h/a$  を0.01と0.5に設定した。これより、 $w$  の値は、面の位置及び  $h/a$  に係わらず、 $\Phi_1$  の増大に伴い、一定の値に収束しており、また、 $\Phi_1 \geq 10^5$  の平板下面の  $w$  の値は0に収束している。これより、 $0 < \Phi_1 < 10^5$  の範囲が弾性基礎であり、 $\Phi_1 \geq 10^5$  の範囲は  $w$  を拘束してしまう剛基礎と判断できる。

図-3には、Winkler基礎にある平板の下面及び上面における応力  $\sigma_x$  の誤差に与える  $h/a$  と  $\Phi_1$  の影響が示してある。ここで、 $h/a$  を0.01から0.5まで、 $\Phi_1$  を0から  $10^3$  まで変化させている。これより、 $h/a$  及び  $\Phi_1$  の値の増大に伴い、 $\sigma_x$  の誤差は増大するが、 $0 < \Phi_1 \leq 10^2$  であれば、 $h/a \leq 0.3$  まで許容誤差範囲内にある。しかし、 $\Phi_1 \geq 10^3$  では、 $h/a \leq 0.1$  でなければ許容誤差範囲内に収まらないため、 $h/a$  の制約から Mindlin 平板理論を適用する利点が失われる。よって、検討範囲を  $0 < \Phi_1 \leq 10^2$  に絞って検討する。

図-4及び図-5には、それぞれ、Winkler基礎にある平板の板厚方向の  $\sigma_x$  分布及び  $\tau_{yz}$  分布の比較が示してある。ここで、 $h/a = 0.3$  及び  $\Phi_1 = 10^2$  に設定した。図-4より、MPTの  $\sigma_x$  分布は中央面を通る直線であるが、3-Dの  $\sigma_x$  分布は曲線かつ非対称であり、平板の中央面から上面に向かうにつれて両者の誤差が大きくなる。ここで、上面と下面での誤差を計算すると、それぞれ、-10.0%と-4.2%である。また、図-5より、MPTの  $\tau_{yz}$  分布は中央面で最大  $\tau_{yz}$  を生じる放物線形状である。他方、3-Dの  $\tau_{yz}$  分布は放物線形状ではあるが、最大  $\tau_{yz}$  の発生位置は中央面から下方に偏心しており、3-Dの最大  $\tau_{yz}$  の発生位置における誤差の値は、-4.7%である。したがって、Winkler基礎にある Mindlin 平板理論の適用範囲は、 $0 < \Phi_1 \leq 10^2$  かつ  $h/a \leq 0.3$  の範囲と言えるが、大きな負の誤差が生じていることには、十分留意する必要がある。また、 $\Phi_1 \geq 10^3$  では、3次元弾性論に基づく解析が必要になると言えよう。

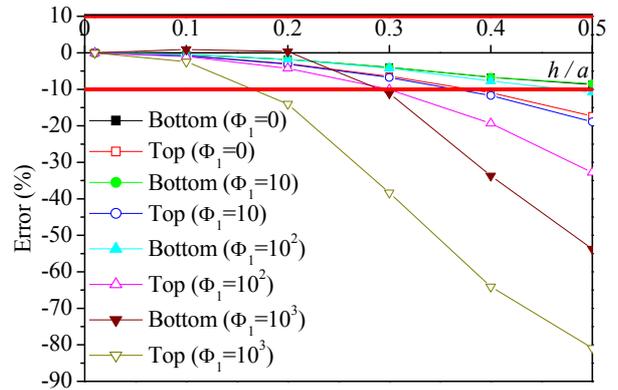


図-3 Winkler基礎にある平板の  $\sigma_x$  の誤差に与える  $h/a$  と  $\Phi_1$  の影響 :  $x/a = y/b = 0.5$

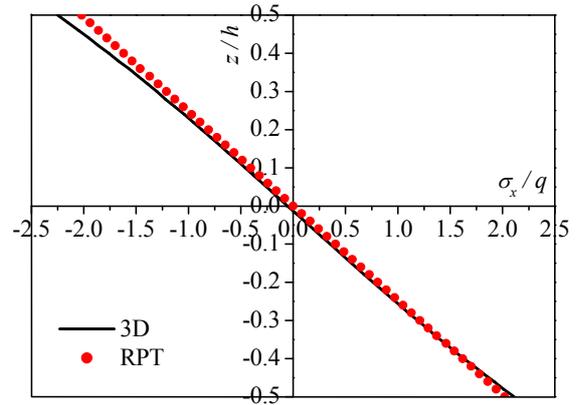


図-4 Winkler基礎にある平板の板厚方向の  $\sigma_x$  分布の比較 :  $x/a = y/b = 0.5, h/a = 0.3, \Phi_1 = 10^2$

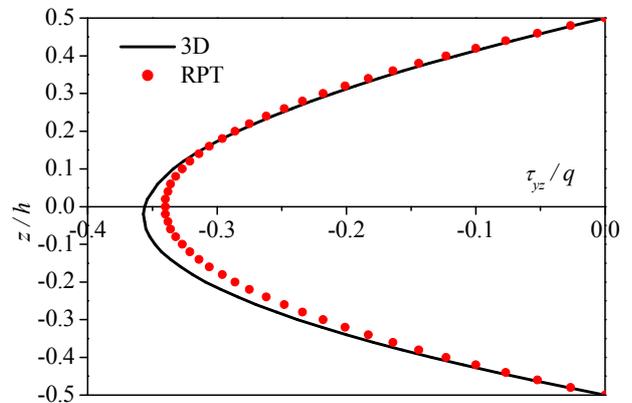


図-5 Winkler基礎にある平板の板厚方向の  $\tau_{yz}$  分布の比較 :  $x/a = y/b = 0.25, h/a = 0.3, \Phi_1 = 10^2$

4. まとめ

本論文では、Winkler基礎にある平板の曲げ問題における Mindlin 平板理論の適用範囲について検討し、その適用範囲は、 $0 < \Phi_1 \leq 10^2$  かつ  $h/a \leq 0.3$  であることを明らかにした。

参考文献

1) 野中ら：土木学会西部支部, I-022, pp.43-44, 2008.