Pochhammer-Chree 方程式による充実円断面はりの減衰振動について

東京理科大学　学生員　三橋　悠三
東京理科大学　正会員　臼木　恒雄

1．はじめに

今回，解析の対象とするのは充実円断面の無限長の梁である．このモデルは３次元弾性論から L.Pochhammer(1876) と C.Chree(1889) によって波動伝播がそれぞれ独立に定式化された．のちに，解析の概要を 20 世紀前半に A.E.H.Love(1926) はその成書の一部に紹介している．さらにこの理論を用いて，無限長はりの位相速度曲線および群速度曲線を与えたのは 20 世紀中頃の H.N.Abramson(1956)[1) である．

一方，実際の材料を扱う上で重要となるのが減衰効果である．特に，高分子材料に代表される粘弾性を扱う場合に重要となる．高分子材料は様々な分野に適用されており、土木工学の分野においても家屋やビルなどの構造物が地震や風によって振動する際に，それを制御する目的などで用いられている．

本研究では以上のような点を鑑み Pochhammer-Chree の理論に減衰効果を考慮した位相速度曲線を求めた．また、高分子材料などの温度による減衰効果を扱うのには分数次微分が適しており，特に 1/2 階微分近辺の減衰効果が実験等により確認されている．そこで，ここでもこれらの減衰効果を調べ，減衰の無い従来の Abramson の結果と比較した．

2．Pochhammer-Chree による振動方程式

無限長の外半径 a の充実円断面のはりにおいて，３次元弾性論から次のような行列式が得られる [1)．

$$\begin{vmatrix} (a_1-a_2)J_1(h'a)+a_2J_3(h'a) & a_3\left[J_3(k'a)-3J_1(k'a)\right] & a_4\left[J_0(k'a)-J_2(k'a)\right]-a_5J_1(k'a) \\ a_5J_1(h'a)-a_6\left[J_0(h'a)-J_2(h'a)\right] & a_4\left[J_2(k'a)-J_0(k'a)\right]+a_5J_1(k'a) & a_3\left[J_1(k'a)-J_3(k'a)\right] \\ a_7\left[J_0(h'a)-J_2(h'a)\right] & a_8\left[J_0(k'a)-J_2(k'a)\right] & a_9J_1(k'a) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

ただし，上式左辺の $a_1, a_2, a_3 \ldots$ は次のように表される．

$$a_1=\frac{1}{1+\nu}-\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\left(\frac{1}{1-\nu}\right),\ a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c_0}\right)^2\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)-\frac{1}{2(1+\nu)},\ a_3=\left(\frac{c}{c_0}\right)^2-\frac{1}{2(1+\nu)}\ldots\text{(以下省略)} \tag{2}$$

3．分数階微分モデル

分数階 β の微分モデルを用いることにより，損失係数 η の材料の複素弾性率 E^* を次のように仮定した．

$$E^*(\omega,\,\eta,\,\beta)=E\left[1+\eta\frac{\partial^\beta}{\partial(\omega\,t)^\beta}\right]\qquad(0\le\beta\le1) \tag{3}$$

時間 t は振動数 ω で無次元化した [2) ため，損失係数 η は分数階 β に関係しない無次元量となる．そして，$\beta=1$ のとき，通常の材料の減衰の表現式となっている．はりの変位成分を $e^{i\omega t}$ の関数としてこの分数階微分モデルを適用すると，弾性率は変化する．弾性率の変化に関係する α_E と α_η を図示すると図- 1 のようになる．実線が α_E，破線が α_η を表す曲線となっている．

$$E^*(\omega,\,\eta,\,\beta)=E\,\alpha_E\left[1+i\,\eta\,\alpha_\eta\right] \tag{4}$$

ただし，

$$\alpha_E(\eta,\,\beta)=1+\eta\cos\frac{\pi}{2}\beta\ \ ,\ \ \alpha_\eta(\eta,\,\beta)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\beta}{1+\eta\cos\frac{\pi}{2}\beta} \tag{5}$$

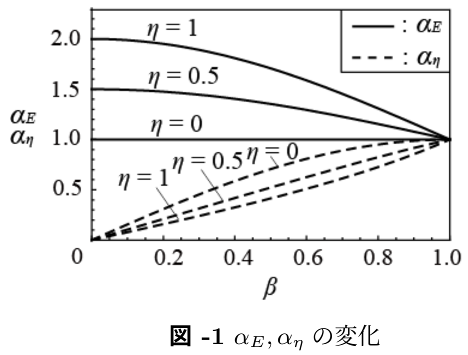


図 -1 α_E, α_η の変化

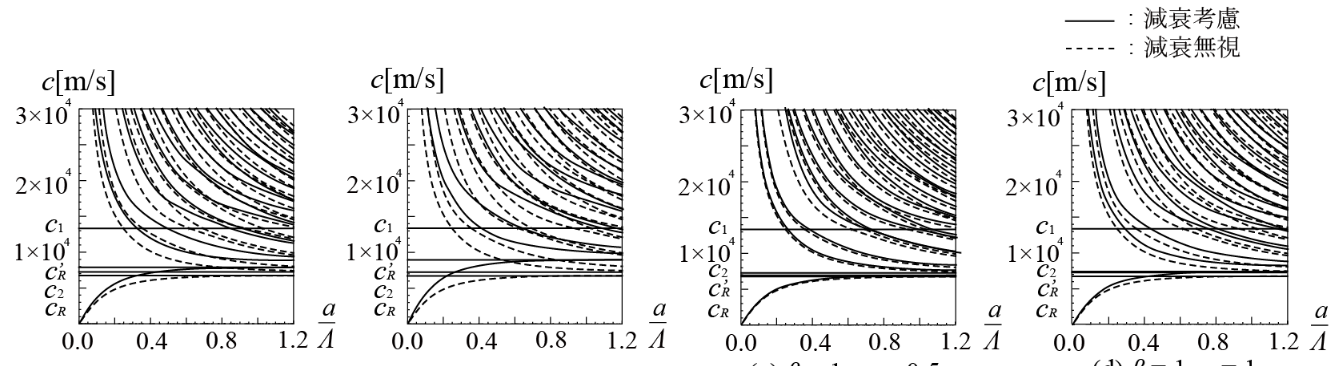
3．解析例

本研究では，解析例としてカーボンとポリマーの複合材料を想定した．ただし，分数階微分の影響のみ検討する目的であえて等方性材料とした．弾性定数として，Lamé 定数の代わりに，工学向きの E および G を用いた．損失係数 η はどちらの弾性定数にも等しいと仮定したため，Poisson 比 ν は実数となった．微分階数 β については 1 と 0.5 の極端な値を使用した．　単位体積重量：$\rho=1760[\mathrm{kg/m^3}]$，弾性率：$E=239\,[\mathrm{GPa}]$，ポアソン比：$\nu=0.29$

KeyWord：粘弾性無限長はり，充実円断面はり，減衰振動，分数階微分モデル，位相速度曲線
連絡先：東京理科大学理工学部土木工学科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 Tel:04-7124-1501(内線:4070))

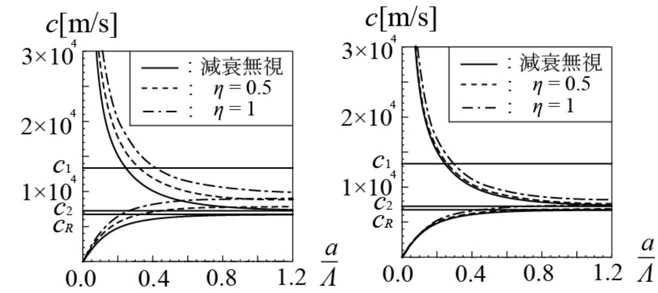
4. 解析結果

解析例から，位相速度曲線を求め比較した．図-2 に示すように β と η の組み合わせにより 4 つの図が得られ，位相速度曲線の収束値において従来の結果から 10 %程度位相速度が増加した．比較のために，縦波速度 c_1，横波速度 c_2，レーリー波速度 c_R を示した．また，レーリー波については近似的に減衰を考慮した c'_R を求めた（厳密な計算は文献[3]を参照されたし）．c'_R は，β と η の組み合わせによって異なった値をとり，ある β と η の組み合わせによっては横波速度と一致する．その組をプロットしたグラフを図-6 に示す．さらに，η と β の影響を調べるために，それぞれを固定し第 1 モードと第 2 モードについて比較したグラフを図-3,4 に示す．$\beta = 1$ では複素弾性率の虚部による影響で位相速度が増加し，それから β の値が小さくなるのに伴い複素弾性率の実部の変化と虚部の影響により位相速度が増加している．$\beta = 1$ では 5 %程度，$\beta = 0.5$ では 20 %程度増加した．微分階数 β の影響については図-5 の，ある a/Λ において第 1 モードの位相速度が β の変化によってどのように変化するかを表すグラフからも読み取ることが出来る．さらに，図- 7 に群速度曲線を示す．実線を減衰を考慮した曲線（$\eta = 0.5$，$\beta = 0.5$），破線を減衰を無視した曲線とし，位相速度曲線の第 1 モードと第 2 モードに対応する群速度を示した．位相速度曲線と同程度の割合で収束値に差を生じた．



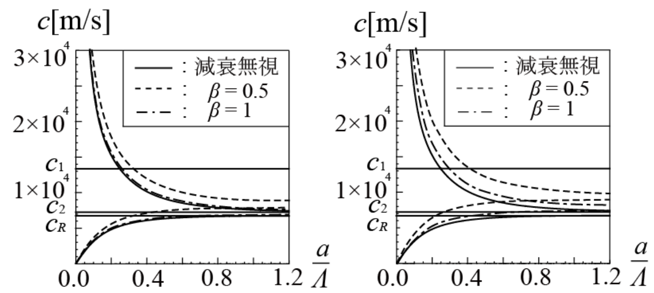
(a) $\beta = 0.5$, $\eta = 0.5$ (b) $\beta = 0.5$, $\eta = 1$ (c) $\beta = 1$, $\eta = 0.5$ (d) $\beta = 1$, $\eta = 1$

図 -2 減衰を考慮した位相速度曲線



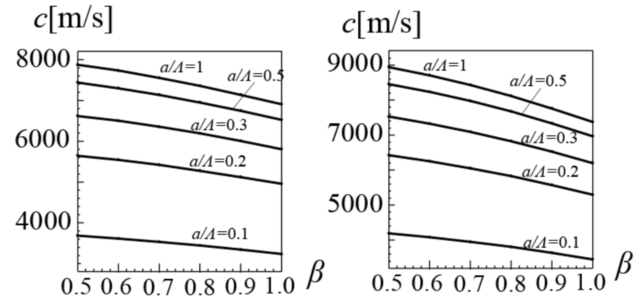
(a) $\beta = 0.5$ (b) $\beta = 1$

図 -3 第 1 モードと第 2 モードにおける比較



(a) $\eta = 0.5$ (b) $\eta = 1$

図 -4 第 1 モードと第 2 モードにおける比較



(a) $\eta = 0.5$ (b) $\eta = 1$

図 -5 位相速度の比較

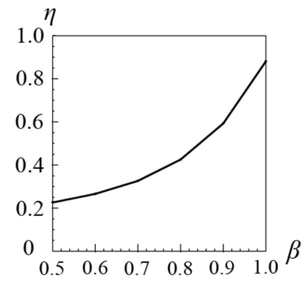


図 -6 β-η

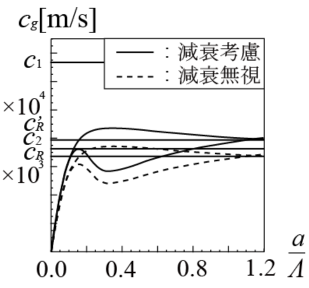


図 -7 群速度曲線

5. 結論

本研究で使用した材料値においては以下のような結論が得られた．

1. 減衰を考慮することにより，位相速度曲線の収束値において従来の結果と 10 %程度位相速度が増加した．
2. 微分階数 β の値を 0.5 と 1 で位相速度曲線の収束値おいて比較すると，$\beta = 0.5$ では 20 %程度，$\beta = 1$ では 5 %程度従来の位相速度より増加しており，$\beta = 0.5$ のほうが位相速度曲線に与える影響は大きい．
3. 群速度曲線の収束値についても，減衰を考慮することにより，位相速度曲線と同程度の割合で結果に差を生ずる．

参考文献

1) Abramson, H.N., *et al.*: J.Acoust.Soc.Am., **29**(1957), 42-46. 2) Jones, I.G. *et al.*: Handbook of Viscoelastic Vibration Damping, John Wiley & Sons, 2001. 3) Romeo, M.: J.Acoust.Soc.Am, **110**(2001), 59-67.