

数値モデル同定解析における特異性の問題について - 逗子市地域の地盤の動的特性 -

正会員 工博 ○安藤幸治

首都大学東京名誉教授 フェロー会員 工博 岩楯敞広

1. はじめに

地震観測記録等を用いた数値モデル同定解析では、正規方程式の特異性の問題や物性値間のトレードオフ等、様々な問題が発生する。それは記録の観測点総数が対象系に対して想定した数値モデルの自由度に比較してわずかであるため、最小二乗法による正規方程式の係数行列を構成する感度量(ヤコビアン)に対して有意な値を与え得るパラメータが限られ、同行列が特異になることが主たる原因である。本研究では逗子市地域の地盤を対象として数値モデル同定解析¹⁾を行い、そのモデルを使用して正規方程式の特異性について検討した。はじめに同方程式の解法として特異性の考慮可能な特異値分解法に基づいた方法について述べる。

2. 特異性を含む正規方程式の解法

今、 m 個のパラメータを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)^T$, n 個の観測値を $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$ ($n \geq m$) とし、両者は次式により関係付けられているものとする(ここに、マトリックスとベクトルは太字で表す)。

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

以下では非線形問題を取り上げ、解 $\mathbf{x}$ の近似値 $\mathbf{x}_0$ の修正量 $\Delta \mathbf{x}$ に関して次のように線形化を行い、これをパラメータとする。

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (2)$$

ここに、行列 $\mathbf{A}$ ($n \times m$) はヤコビアン行列である。

$\Delta \mathbf{x}$ は、最小二乗法より導かれる次の正規方程式から求められる。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ である。

上式の係数行列 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ について特異性が考慮できるように、予め $\mathbf{A}$ に対して特異値分解を行う。即ち、

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{U}$ ($n \times n$)、 $\mathbf{V}$ ($m \times m$) は、 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_r$ を、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ の固有ベクトル $\mathbf{u}_r$ をそれぞれ列ベクトルに持つ行列である。 $\mathbf{\Lambda}$ ($n \times m$) は、対角項に m 個の特異値 λ_r を持ち、他の要素はゼロである。ここに、 λ_r

は大きい順 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_m$ に配置する。

式(4)より、式(3)の解 $\Delta \mathbf{x}$ は次のようになる。

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b} = \sum_{r=1}^R \lambda_r^{-1} \mathbf{u}_r^T \mathbf{b} \mathbf{v}_r \quad (5)$$

もし $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ が特異であれば、その行列式は固有値 λ_r^2 の積で表されるのである次数以降にゼロあるいは極めて小さい固有値が並ぶ。そこで λ_r の相対比を考慮して次式を満たす特異値を使用して計算する方法(特異値分解法)が考案された。

$$\lambda_r / \lambda_1 \geq \gamma \quad (6)$$

ただし、 $\Delta \mathbf{x}$ は γ 値($\approx 10^{-3}$)により変化をするため最確値の判断は難しい。本研究では解 $\Delta \mathbf{x}$ の計算は次のような手順で実施した。 $R=1$ から始めて部分空間 $\mathbf{v}_1$ で繰り返し収束演算を行う。 $R=1$ と 2 の 2 つの直交空間 $\mathbf{v}_1$ および $\mathbf{v}_2$ 上で演算を繰り返す、解の動向を見ながら次数を上げて同様の計算を実施する、ある次数 s で解が発散したとき、その直前の次数 $s-1$ の解を最確値とする。

3. 数値モデル同定解析—逗子市地域の地盤の動特性

首都大学東京は逗子市の防災計画策定²⁾の一環として地震観測を実施している。本解析では同市で観測された鉛直アレー地震記録(地表面と深さ 30m の記録)を使用した。はじめに地震記録 2 個を使用して時間領域でモード解析¹⁾を行い平均的なモード定数(固有値と固有ベクトル)を求め、次いでその結果を参照して地盤モデルの同定解析¹⁾を行い物性値(せん断波速度 V_s と減衰定数 h)を同定した。同定解析は対象地盤を水平成層構造とみなして次元重複反射理論に従う数値モデルを使用して実施した。

同定解析では式(5)で $R=1$ のとき最確値が得られた。同定された地盤物性値を表 1 に示す。同定値の初期値に対する最大変化率は層番号 3 のせん断波速度の +1.26 である。この値は初期値の 2 倍強であるが、発散した値ではない。他の物性値に取って代わり得る(トレードオフ)ものでもなく、正常に収束して得られた値である。他の物性値は +0.1 以下に留まる。図 1 に

キーワード：同定解析，最小二乗法，正規方程式，特異性，トレードオフ，逗子市

連絡先：〒207-0014 東京都東大和市南街5-39-16 mail: andoughnut@s3.dion.ne.jp

モード解析の結果と同定解析の結果の比較図を示す．
良好な結果である．

4. 正規方程式の特異性

特異性の問題は，せん断波速度 V_s をパラメータに設定して検討した．上記のように次数 $R=1$ で求められた物性値を最確値としたが，更に次数 R を上げて演算を繰り返せば， $+0.1$ 以下に変化が抑えられていた層の V_s 値は発散する．図 2，3 は，次数 R を 1 から 3 へ上げた場合の残差およびパラメータの動向を示した図である．各次数の動向は次のようになる．

$R=1$ のとき：初期モデルの伝達関数の周波数特性が観測値であるモード解析の結果に比較して違いが大きいため，はじめに周波数範囲を $0.0 \sim 5.0\text{Hz}$ に設定して実施し（収束回数 62），次にその範囲を $0.0 \sim 8.0\text{Hz}$ に改め演算を繰り返した（収束回数 3）．

$R=2$ のとき：5 回で収束した．図 2 より，相対誤差は $R=1$ の収束時に比較してわずかながら減少しているが，第 2 次モードの固有周波数に相違が見られたため最確値とはならない．

$R=3$ のとき： $R=1, 2$ で抑えられていたパラメータに変化が見られ，繰り返し回数 81 以降で急激に大きくなった． $R=3$ の収束値を表 1 に示す．このときのモデルの加速度応答はほぼ観測値を再現する．即ち，発散した 5 個のパラメータについて， $R=1$ の収束値と $R=3$ の収束値間には 113 ～ 250 倍の違いがあるが，その間の値であれば $R=1$ のモデルと同様の応答特性が得られることを意味する．これは特異値 λ_3 の特異性が招いた結果であり， $R < m$ でモデルの一意性が問われることからトレードオフとは密接な関係があることが理解される．

5. おわりに

同定解析では正規方程式の特異性が常に問題になる．ここに紹介した解法のように，その性質を特異値より確認すれば比較的容易に解決できるものとする．同時にトレードオフの問題も解消する．

参考文献

- 1) 安藤幸治, 岩楯敬広: 時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用, 土木学会論文集 No.450 /I-20, PP.151～160, 1992.7
- 2) Takahiro IWATATE, Akio OHOKA Surface Ground Motion Characteristics of Zushi-site 'Memoirs of Faculty of Engineering Tokyo Metropolitan University No ' 1996

表 1 同定された物性値

番号	土 質	w (t/m^3)	init. V_s (m/s)	$R=1$	$R=3$
				$V_s(m/s)$	$V_s(m/s)$
1	埋土	1.70	150.0	150.1	25928.0
2	砂質土	1.80	130.0	136.0	96.7
3	砂質土	1.50	100.0	225.7	177.4
4	砂質土	1.90	220.0	238.6	59923.0
5	砂質土	2.00	250.0	253.6	49396.0
6	風化土	2.00	400.0	400.9	51684.0
7	基 盤	2.10	700.0	700.7	79059.0

* 層厚 (m): 上から, 1.0, 3.0, 16.0, 4.0, 1.0, 1.0

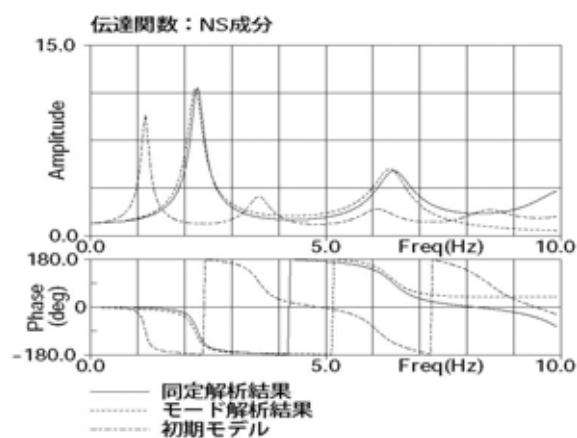


図 1 伝達関数の比較

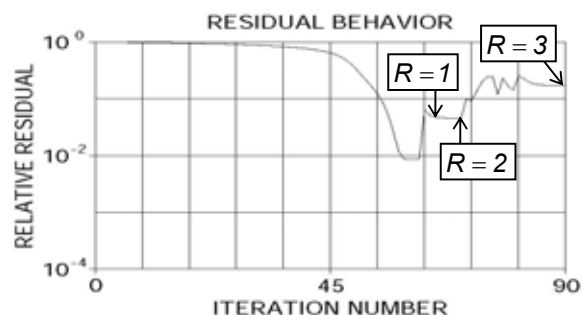


図 2 残差の動向

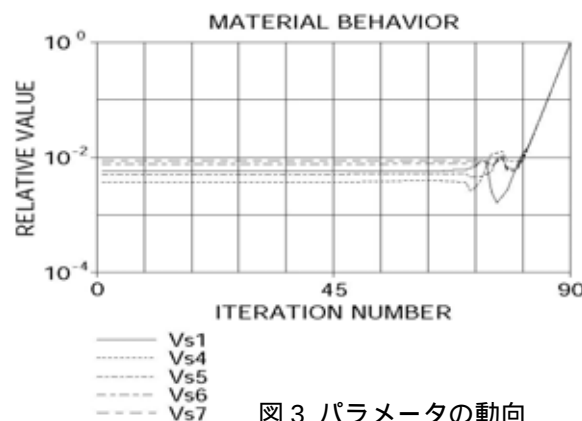


図 3 パラメータの動向