領域積分方程式を用いた急変する揺らぎを持つ半無限弾性波動場の散乱解析

東京理科大学　学生会員　○高岸智紘
東京理科大学　正会員　東平光生

1　はじめに

領域積分方程式は，媒質の不均質性と散乱波動場を直接結びつける数学的利点を有している．しかし，スタンダードな手法で離散化すると，大規模な密行列が生成され，近年の高速計算機によっても，計算が困難となる．本研究では，半無限弾性波動場において，領域積分方程式を境界条件を考慮した Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法 [1] を組み合わせる手法を提案してきた [2]．この新たな手法により，係数行列を導出することなく，半無限弾性波動場の散乱解析を可能にしてきた．

本論文では，領域積分方程式を用いた急変する揺らぎを持つ半無限弾性波動場における散乱解析の手法の概要と数値計算結果，MPI 並列計算 [3] を用いた演算時間の短縮について示す．

2　解析手法の概要

2.1　領域積分方程式

図–1 に示すように点震源で発生した入射波を媒質の揺らぎに照射し，散乱波を発生させる問題を扱う．揺らぎを持つ半無限弾性波動場の全波動場は次の積分方程式で表現することが可能である．

$$u_i(\vec{x}) = g_{ij}(\vec{x},\vec{x}_s)q_j - \int_{\mathbb{R}^3_+} g_{ij}(\vec{x},\vec{y})N_{jk}(\vec{y})u_k(\vec{y})d\vec{y} \qquad (1)$$

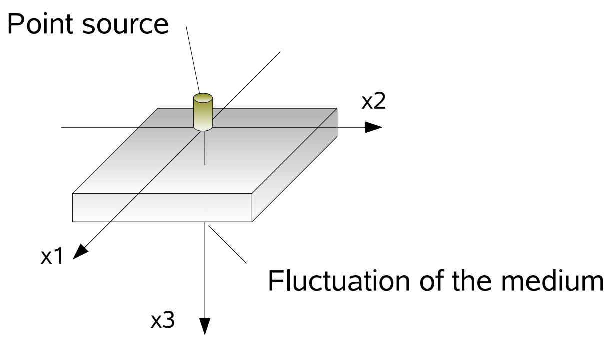
ここで，$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は観測点の位置ベクトル，$\vec{x}_s$ は加振点の位置，u は全波動場，g_{ij} は Green 関数，q_j は加振力ベクトルの成分，N_{jk} は弾性定数の変動部分で表される関数である．本論文では領域積分方程式を波数領域に変換し，そこに Krylov 部分空間反復解法を適用する．ただし，弾性定数の変動部分は次のように表せる．

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{x}) &= \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) &= \mu_0 + \tilde{\mu}(\vec{x}), \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3_+) \end{aligned} \qquad (2)$$

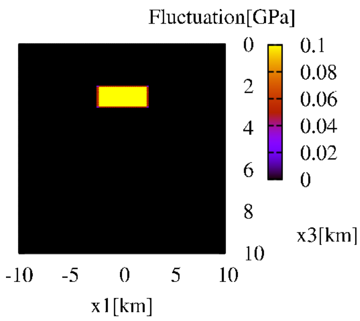
2.2　波領域数における領域積分方程式

領域積分方程式，式 (1) を散乱波

$$v_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - g_{ij}(\vec{x},\vec{x}_s)q_j \qquad (3)$$



図– 1: 解析モデル



図– 2: Lamé 定数の空間変動分布 ($x_2 = 0$km)

に関するものに書き換え，境界条件を考慮した Fourier 変換 (以降の議論では一般化 Fourier 変換と呼ぶ) を適用することで次式を得る．

$$\begin{aligned} \hat{v}_i(\vec{\xi}) \;=\; & -\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}^{-1}_{kl}\hat{f}_l(\vec{\xi}) \\ & -\hat{h}(\vec{\xi})\mathscr{U}_{ij}N_{jk}(\vec{x})\mathscr{U}^{-1}_{kl}\hat{v}_l(\vec{\xi}) \end{aligned} \qquad (4)$$

ここに，$\hat{v}_i$ は散乱波，$\hat{h}$ は波数領域の Green 関数，$\hat{f}$ は入射波である．$\mathscr{U}$ は一般化 Fourier 変換の演算子，$\mathscr{U}^{-1}$ は一般化 Fourier 逆変換の演算子である．また，$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は波数領域のベクトルであり，x_3，ξ_3 は正の値のみを持つ．

3　数値計算結果

ここでは，入射波を**図-2** に示す媒質の揺らぎに照射し，散乱波を生じる問題を考える．弾性定数のバックグラウン

キーワード：領域積分方程式，一般化 Fourier 変換，Fourier 積分変換，Krylov 部分空間反復解法，Haar の box 関数
〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4055)

ドは，$\lambda_0 = 4\mathrm{GPa}$，$\mu_0 = 2\mathrm{GPa}$，$\rho = 2\mathrm{g/cm^3}$ とする．すなわち，このときの P 波の速度は 2km/s，S 波の速度は 1km/s である．また，波動場の振動数を 1Hz とする．また揺らぎに関しては急激に変動するような状況を考慮するために、本論文では弾性定数が均質場と不連続に変動するような揺らぎを扱うことを考えた．

今回の計算では揺らぎの大きさを x_1, x_2 方向に 5km，x_3 方向に 1km とし，中心座標を $(0, 0, 2.5)$ とした．Lamé 定数の変動部分の関数を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda}(\vec{x}) &= 0.1\phi_1(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{2}) \\
&\quad \phi_3(x_3 + 3) \qquad [\mathrm{GPa}] \\
\tilde{\mu}(\vec{x}) &= 0.1\phi_1(\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{2}) \\
&\quad \phi_3(x_3 + 3) \qquad [\mathrm{GPa}]
\end{aligned} \tag{5}
$$

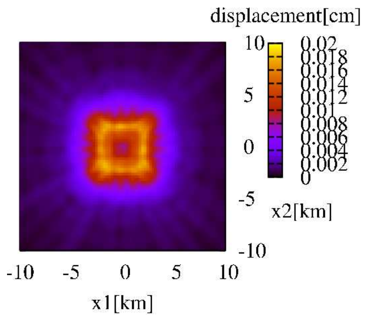
ここで，$\phi_i(x_i)$ は x_i 方向の Haar の box 関数であり，以下のように定義される．

$$
\phi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{6}
$$

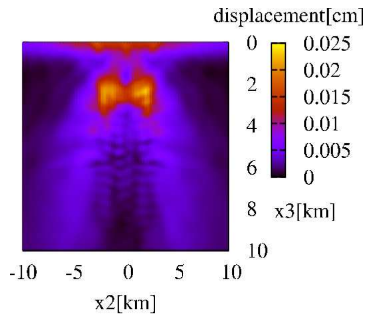
このとき，**図–3** に $x_3 = 3\mathrm{km}$ 平面における水平方向の散乱波の解析結果を示す．散乱波が揺らぎの形をとらえて発生している様子が分かる．また，角の部分で若干ではあるが強く出ている様子がわかる．

また，**図–4** では $x_2 = 0\mathrm{km}$ 平面における鉛直方向の散乱波の解析結果を示している．揺らぎを通過することで，波の進行方向に散乱波の変位が大きいことが見て取れる．また，地表面においても大きくなっていることが見て取れる．これは，自由表面での表面波の影響と考えられる．

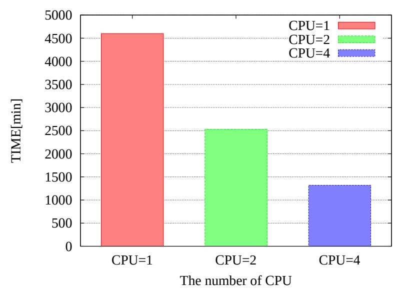
今回の計算では MPI 並列計算を用いて演算時間の短縮を図った．その結果を**図–5** に示す．cpu の数を増やす毎に計算時間を短縮することができた．削減時間が CPU の数に比例していないのは並列化していない部分があること，CPU 間の通信に時間があるなどの問題が挙げられる．



図– 3: 解析結果 [水平断面の散乱波の変位]



図– 4: 解析結果 [鉛直断面の散乱波の変位]



図– 5: 演算時間の比較

4 むすび

本論文では，揺らぎを持つ半無限弾性波動場において領域積分方程式を用いた散乱解析手法の概要を示した．ここでは，Krylov 部分空間反復解法と一般化 Fourier 変換を組み合わせる手法を提示し，半無限弾性波動場における散乱解析の解析結果を示した．結果に示したものは一例であるが，他の解析でも同様の結果が得られた．

今後の課題は一般化 Fourier 変換の計算時間の短縮と逆散乱解析を成功させせることである．

5 参考文献

1) 藤野清次，張紹良: 反復解法の数理，応用数値計算ライブラリー，朝倉書店，1996.

2) Touhei，T.：Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space，*International Journal of Solids and Structures*，Vol. 46，pp. 52-73， 2009.

3) Pacheco, P.S.: *Parallel programing with MPI*, Morgan Kaufmann Publishers, Co. Ltd, 1997