Born 近似を用いた半無限弾性波動場における散乱解析

東京理科大学　学生会員　○和嶋 泰亮
東京理科大学　正会員　東平 光生

1　はじめに

領域積分方程式は，媒質の不均質領域 (揺らぎ) と弾性波動場を直接結びつける利点を有している．しかしながら，スタンダードな解法では，大規模な密行列のために計算が困難である．著者の一人によって，領域積分方程式を一般化 Fourier 変換 (GFT) と Krylov 部分空間反復解法 [1] を組み合わせて解く手法が提案された [2]．一般化 Fourier 変換とは境界条件を考慮した Fourier 変換である．この新たな手法により，係数行列を導出することなく，半無限弾性波動場の散乱解析を可能にしてきた．この手法の妥当性は概ね実証されているものの，別の手法での検証が必要である．本論文では，GFT と反復解法を組み合わせた解法を検証するために，Born 近似 [3] を用いた計算プログラムを構築し，その解析結果の比較を行う．

2　解析手法の概要

2.1　領域積分方程式

本論文では**図–1** に示すような媒質に揺らぎを持つ 3 次元の半無限弾性波動場を扱う．点加振により生じる波動を媒質の揺らぎに照射し，生じる散乱波動の計算手法を展開する．この時の領域積分方程式は次式となる．

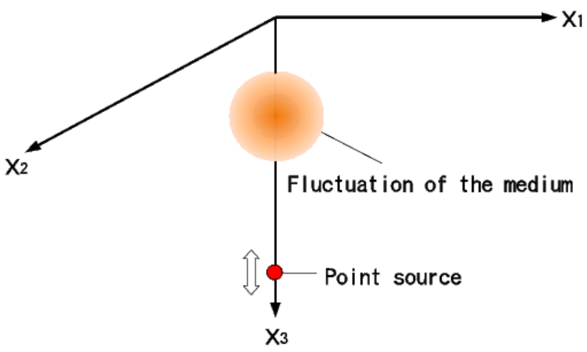
$$u_i(\vec{x}) = g_{ij}(\vec{x}, \vec{x_s})q_j - \int_{\mathbb{R}^3_+} g_{ij}(\vec{x}, \vec{y})N_{jk}(\vec{y})u_k(\vec{y})d\vec{y} \quad (1)$$

ここに，$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ は観測点の位置ベクトル，$\vec{x_s}$ は加振力の作用位置，u は全波動場，g_{ij} は Hankel 変換を用いて合成した Green 関数，q_j は加振力ベクトルの成分，N_{jk} は Lamé 定数の変動部分から構成される関数である．

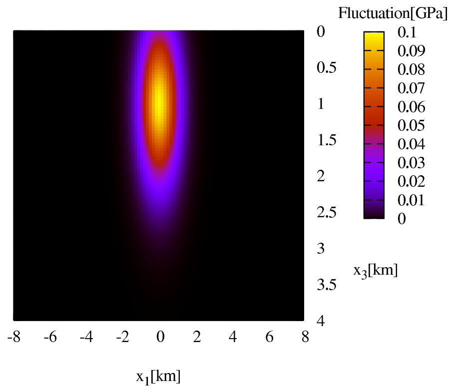
ただし，媒質の Lamé 定数は次式で与える．

$$\lambda(\vec{x}) = \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\vec{x}) \quad (2)$$
$$\mu(\vec{x}) = \mu_0 + \tilde{\mu}(\vec{x}), \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3_+) \quad (3)$$

ここに，$\mathbb{R}^3_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ は 3 次元の半無限空間を表す．さらに，λ_0，μ_0 は Lamé 定数が一定の部分でバックグラウンドの Lamé 定数と呼ぶ．これに対し，$\tilde{\lambda}$，$\tilde{\mu}$ は Lamé 定数の変動部分，即ち，媒質の揺らぎを表す．



図– 1: 解析モデル



図– 2: 媒質の揺らぎのモデル ($x_2 = 0$km)

2.2　Born 近似による領域積分方程式の解法

式 (1) の領域積分方程式に対して Born 近似を適用する．形式的には，全波動場 $u_k(\vec{y})$ を入射波動を表す $g_{kl}(\vec{y}, \vec{x_s})q_l$ に置き換えることで，散乱波に関する次式を得る．

$$v_i(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3_+} g_{ij}(\vec{x}, \vec{y})N_{jk}(\vec{y})g_{kl}(\vec{y}, \vec{x_s})q_l d\vec{y} \quad (4)$$

ここで，v_i は散乱波で以下のように定義している．

$$v_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) - g_{ij}(\vec{x}, \vec{x_s})q_j \quad (5)$$

キーワード：領域積分方程式，Fourier 積分変換，Krylov 部分空間反復解法，一般化 Fourier 変換，Born 近似
〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 東京理科大学理工学部土木工学科 応用力学研究室 TEL:0471-24-1501(ex 4075)

3 数値計算結果

本論文で展開した解析手法の数値計算例を示す．波動場のバックグラウンドの Lamé 定数および質量密度は，$\lambda_b = 4.0$GPa，$\mu_b = 2.0$GPa，$\rho = 2.0 \times 10^3$kg/m^3 とする．この解析条件において，P 波の速度は $c_L = 2$km/s，S 波の速度は $c_T = 1$km/s である．また，波動場の振動数を 1Hz とする．加振力の作用位置は地表面から深さ 3km で，鉛直方向の加振力を点震源で与える．媒質の揺らぎは**図–2** に示すように，地表面から深さ 1km でピーク値を持ち，なだらかに変動するものを想定する．

この解析モデルにおける散乱波の変位分布 (地表面，実部) を**図–3** に示す．媒質の揺らぎが存在する中心付近で振幅が大きく，遠方に進むにつれ減衰していく様子がわかる．また，同モデルにおける GFT と反復解法を組み合わせた解法の散乱波の変位分布を**図–4** に示す．**図–3**，**図–4** を比較すると，中心付近の振幅に差異が見られるものの，両者は概ね一致していることがわかる．

本解析モデルにおける各解法での演算時間を以下に示す．ただし，演算時間は，Born 近似による手法は水平方向の grid 64×64 点に対して，GFT と反復解法による手法は水平方向および鉛直方向の grid $256 \times 256 \times 256$ 点に対しての値である．なお，両手法ともプログラムの並列化は行っていない．

表– 1: 各解法での演算時間

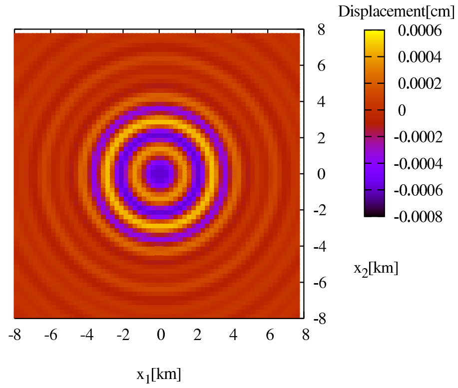
解法	観測点数	演算時間
Born 近似による手法	64^2	約 22.5 時間
GFT と反復解法による手法	256^3	約 6.5 時間

演算時間を比べると，**表–1** から明らかなように，GFT と反復解法を組み合わせた手法に比べ，Born 近似による手法は多大な演算時間を要している．これは，Hankel 変換を用いて合成した Green 関数の計算に多大な時間を要することによる．

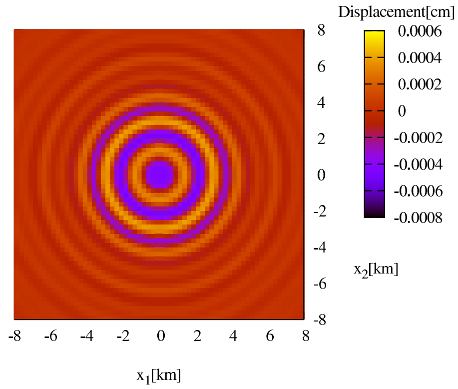
4 むすび

本論文では，Born 近似を用いた半無限弾性波動場における散乱解析と題し，一般化 Fourier 変換と Krylov 部分空間反復解法を組み合わせた手法の妥当性を検証するため，Born 近似による領域積分方程式の解法を論じ，得られた解析結果の比較を行った．本研究で得られた知見をまとめると以下のようになる．

1. Born 近似による手法の解析結果と GFT と反復解法を組み合わせた手法の解析結果が概ね一致していることから，GFT と反復解法を組み合わせた手法の妥当性は実証されたと言える．



図– 3: Born 近似による解析結果 ($x_3 = 0$km)



図– 4: GFT と反復解法による解析結果 ($x_3 = 0$km)

2. GFT と反復解法を組み合わせた解法は，積分方程式のスタンダードな解法である Born 近似に比べ，演算時間が短い．この結果から，GFT と反復解法を組み合わせた手法は，領域積分方程式に効果的な解法である．

今後の課題は，GFT と反復解法を組み合わせた解法の演算時間の短縮である．プログラムの並列化および一般化 Fourier 変換の高速化によって，さらなる演算時間の短縮が期待できる．

5 参考文献

1) 藤野清次，張紹良: 反復法の数理， 応用数値計算ライブラリー， 朝倉書店， 1996.

2) Touhei，T.：Generalized Fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space，*International Journal of Solids and Structures*，Vol. 46，pp. 52-73， 2009.

3) Colton，D. and Kress，R.：*Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*， Berlin， Springer， 1998.