# 時間領域境界要素法による低次群中性子拡散解析

福井大学大学院　学生会員　○　山口　潤
福井大学大学院　正 会 員　　　福井 卓雄

## 1　はじめに

本論文では、低次群中性子拡散問題の時間領域境界要素法を Lubich の演算子積分法を適用して定式化を行う。

これまでの研究においては、Lubich の演算子積分法 [2] を用いて境界要素法を定式化することにより、直接に拡散方程式の基本解を求めずに、その Laplace 変換解を用いて境界要素法を構成してきた [1]。本研究では、この手法を低次群中性子拡散問題に拡張する。

## 2　時間領域境界要素法

$N$ 群中性子拡散問題について考えよう。$i$ 群の中性子束を $\phi_i$ とするとき、$i$ 群の群拡散方程式は

$$\left(\delta_{ij}\nabla^2 - A_{ij} + B_{ij}\right)\phi_j + s_i = \frac{1}{C_{ij}}\frac{\partial \phi_j}{\partial t} \tag{1}$$

のように表現することができる [3, 4]。ただし、群は中性子エネルギーの大きい方から番号付けされている。以下では、添字については総和規約を適用するものとする。ここで、$s_i$ は中性子源の $i$ 群への寄与分である。$B_{ij}$ は群間の相互作用に関する係数で

$$B_{ij} = \frac{1}{D_i}\left(\Sigma_{j\to i} + \chi_j \nu \Sigma_f^j\right) \tag{2}$$

により与えられる。ここに、$\Sigma_f^i$ は $i$ 群の群平均巨視的核分裂断面積、$\nu$ は核分裂一回で発生する中性子の平均個数、$\chi_i$ は $i$ 群にエネルギーを持って発生する核分裂中性子の平均個数、$D_i$ は群拡散係数である。$\Sigma_{i\to j}$ は $i$ 群から $j$ 群への巨視的群遷移散乱断面積である。ここでは、中性子が散乱されるとエネルギーを失うと仮定しているので、$\Sigma_{i\to j} = 0\ (i \geq j)$ である。$A_{ij}$ および $C_{ij}$ は対角行列であり、その対角項は

$$A_{ii} = A_i = \frac{1}{D_i}\left(\Sigma_{ai} + \sum_{j=i+1}^{N}\Sigma_{i\to j}\right) \tag{3}$$

$$C_{ii} = C_i = v_i D_i \tag{4}$$

により与えられる。ここに、$\Sigma_{ai}$ は $i$ 群の巨視的吸収断面積、$v_i$ は $i$ 群の中性子の速度である。また、(3)、(4) においては総和規約は適用しない。

$N$ 元連立偏微分方程式 (1) の初期値境界値問題の解 $\phi_i$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}C(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{x},t) &= \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * s_j(\boldsymbol{y},t)\,dV_y\\ &+ \int_B G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\,\phi_j(\boldsymbol{y},0)\,dV_y\\ &+ \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * \frac{\partial \phi_j(\boldsymbol{y},t)}{\partial n}\,dS_y\\ &- \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * \phi_j(\boldsymbol{y},t)\,dS_y\end{aligned} \tag{5}$$

ここに、$B$ および $\partial B$ は与えられた領域およびその境界、$f*g$ は繰り込み積、$C(\boldsymbol{x})$ は自由項であり、$\boldsymbol{x}$ が領域内部のとき 1、なめらかな境界上のとき 1/2、領域外部のとき 0 の値をとる。また、添字 $y$ は $\boldsymbol{y}$ についての積分であることを示す。$S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は二重層核である。式 (5) において、右辺第 1 項は中性子源による項、第 2 項は初期値による項、第 3 項は境界値 $\partial\phi_i/\partial n$ による項、第 4 項は境界値 $\phi_i$ による項である。(5) は $\boldsymbol{x}$ が境界上にあるとき、未知の境界値に関する境界積分方程式である。

演算子積分法を用いることにより、境界積分方程式 (5) を時間域において離散化し、境界および領域を要素に分割し、境界関数および領域関数について近似を導入すると境界要素法を構成することができる。

離散化後の境界積分方程式 (5) は

$$\begin{aligned}C(\boldsymbol{x})\phi_i(\boldsymbol{x},n\Delta t) &\simeq \sum_J^M\sum_{k=1}^n \bar{A}_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x})s_{j,J}(k\Delta t)\\ &+\sum_J^{M_B}\bar{A}_i^n(\boldsymbol{x})\phi_{j,J}(0) + \sum_J^M\sum_{k=1}^n A_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x})J_{j,J}(k\Delta t)\\ &-\sum_J^M\sum_{k=1}^n B_{ij,J}^{n-k}(\boldsymbol{x})\phi_{j,J}(k\Delta t)\end{aligned} \tag{6}$$

となる。ここに、$M$ は境界の要素分割数、$M_B$ は領域内の要素分割数である。影響関数 $A_{ij,J}^m(\boldsymbol{x})$, $B_{ij,J}^m(\boldsymbol{x})$ および $\bar{A}_{ij,J}^m(\boldsymbol{x})$ は、もっとも単純な一定要素の場合には次のようである。

$$A_{ij,J}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{E_J}\hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)dS_y\right]e^{-2\pi iml/L}$$

$$B_{ij,J}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{E_J}\hat{S}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)dS_y\right]e^{-2\pi iml/L}$$

$$\bar{A}_{ij,J}^m(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_{\bar{E}_J}\hat{G}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right)dV_y\right]e^{-2\pi iml/L}$$

$E_J$、$\bar{E}_J$ は $J$ 番目の境界要素および領域要素である。

## 3　多群拡散方程式の基本解

群拡散方程式 (1) の Laplace 変換は、

$$\boldsymbol{L}_{ij}\hat{\phi}_j = \left[\delta_{ij}\nabla^2 - \left(A_{ij} + \frac{p}{C_{ij}}\right) + B_{ij}\right]\hat{\phi}_j = 0$$

$$= \left(\delta_{ij}\nabla^2 - \bar{A}_{ij} + B_{ij}\right)\hat{\phi}_j = 0 \qquad (7)$$

となる。ここに、$p$ は Laplace 変換のパラメータである。また、中性子源の項は省略した。係数行列 $\bar{A}_{ij} = A_{ij} + pC_{ij}$ は、対角行列であるが、Laplace 変換パラメータ $p$ を含んでいるため、複素行列となる。

時間項を含まない方程式 (7) の基本解は

$$\boldsymbol{L}_{ij}\hat{G}_{jk}(\boldsymbol{x}) = -\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{x}) \qquad (8)$$

の解として与えられる。$\hat{G}_{ij}$ は Hölmander の方法によって求めることができる。すなわち、作用素 $\boldsymbol{L}_{ij}$ の行列式を $\boldsymbol{U}$ とし、余因子行列を $\boldsymbol{N}_{ij}$ とすれば、作用素 $\boldsymbol{U}$ の基本解

$$\boldsymbol{U}\hat{G}(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}) \qquad (9)$$

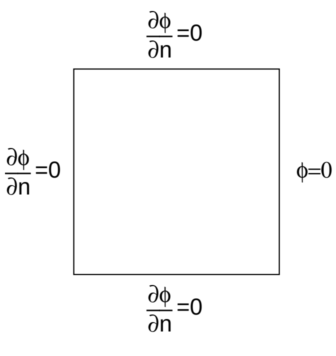
に対して、基本解 $\hat{G}_{ij}$ は

$$\hat{G}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}_{ji}\hat{G}(\boldsymbol{x}) \qquad (10)$$

により求めることができる。

## 4　数値解析例

本解法の妥当性を検証するために、簡単な 1 次元問題を 2 次元解析し、結果を 1 次元の差分法による解析結果と比較した。以下の解析では、係数等はすべて無次元化している。解析対象領域および境界条件を図–1 に示す。




図–1　解析領域 1

解析は中性子エネルギーを 4 群に分けて行い、中性子源 $s_1 = 1$ を全領域で与えている。初期値はすべての群において $\phi_i = 0$ である。解析に用いた定数を表–1 に示す。

本手法では、境界の各辺は 10 分割して要素とし、全部で 40 要素とした。時間増分は単位時間 $T$ に対して $\Delta t = T/256$ とした。解析期間は $(0, 4T]$ である。

表–1　4 群拡散解析の材料定数

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 3.2 | 1.3 | 1.0 | 0.5 |
| B | 0.0 | 1.2 | 0.5 | 0.3 |
| | 1.4 | 0.0 | 0.3 | 0.2 |
| | 1.2 | 0.5 | 0.0 | 0.1 |
| | 1.0 | 0.8 | 0.2 | 0.0 |
| C | 1.0 | 1.5 | 1.0 | 1.0 |

表–2　本手法の解析結果と差分解との比較

| | 時刻 $t$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 群 | BEM | 0.23347 | 0.24563 | 0.24809 |
| | FDM | 0.23718 | 0.24926 | 0.25160 |
| 2 群 | BEM | 0.084819 | 0.10833 | 0.11330 |
| | FDM | 0.085123 | 0.10851 | 0.11330 |
| 3 群 | BEM | 0.088990 | 0.10758 | 0.11121 |
| | FDM | 0.089259 | 0.10771 | 0.11115 |
| 4 群 | BEM | 0.094116 | 0.12126 | 0.12721 |
| | FDM | 0.094401 | 0.12135 | 0.12698 |

比較対象とした差分解は、単純な前進差分法を用いて計算している。区間 $[0, 1]$ を 200 分割し、時間増分は $T/160,000$ である。数値解析結果を比較したものを表–2 に示す。

点 $(0, 0.5)$ における数値解を比較したものである。1 群の値の差がやや大きいものの、その差は数%以内であり、境界分割の粗さや時間増分の大きさを考慮すれば、解析精度は相当に高いものと考えられる。

## 5　おわりに

群中性子拡散問題の時間領域境界要素法を演算子積分法を用いて定式化した。また、4 群拡散問題について数値解析を行い、差分解と比較して、本解法が妥当であることを確認した。

多群中性子拡散問題の課外として、群の数が多くなったときの基本解の一般的な導出手法の開発、適切な時間増分を決定するための条件を見つけ出すこと等を考えている。

## 参考文献

[1] 福井卓雄：演算子積分法による中性子拡散問題の時間領域境界要素法, 計算力学講演会論文集, 12, pp.861-864, 2007.

[2] Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129–145, pp. 413–425, 1988.

[3] Lamarsh, J.R. and A.J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering*, 3rd ed., Pearson Education Inc., 2001.

[4] Stacey, W.M., *Nuclear Reactor Physics*, 2nd ed., Wiley-VHC, 2007.