高精度流体解析のための Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の開発

八戸高専 正会員 ○丸岡 晃
富山大学 正会員 奥村 弘

1. はじめに

筆者らは，有限要素法による高精度流体解析のために，移流拡散問題によって，Hermite 型要素を用いた特性有限要素法として，SLG（semi–Lagrange Galerkin）法[1)]と，HCG（Hermitian characteristic Galerkin）法[2)]を提案してきた．さらに，HCG 法の時間離散に動的構造解析でよく用いられる線形加速度法を用いた新たな時間 2 次精度の手法[3)]（以下，HCG–LA 法と略す）を提案した．本研究では，HCG–LA 法を 2 次元非圧縮性 Navier–Stokes 方程式に適用し，数値実験によって精度検証したものを報告する．

2. 非圧縮性 Navier–Stokes 方程式

境界 $\Gamma\,(\equiv \partial\Omega)$ を有する領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において，非圧縮性 Navier–Stokes 方程式を考える．

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) + \nabla p - \nabla\cdot 2\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{f} & \text{in }\Omega\,(1) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{in }\Omega\,(2) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{on }\Gamma\,(3) \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) & \text{in }\Omega\,(4) \end{cases}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は流速，p は圧力，$\boldsymbol{f}$ は外力，ρ は密度，μ は粘性係数，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ は以下に示す歪み速度テンソルである．

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right) \tag{5}$$

特性法では，式 (1) の加速度項（時間微分項と移流項）を以下のような Lagrange 微分の形で表す．

$$\dot{\boldsymbol{u}} \equiv \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t\,;\tau),\tau)\big|_{\tau=t} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t\,;\tau)$ は時間 t での位置 $\boldsymbol{x}$ を起点とする特性曲線上の時間 τ での位置であり，以下のような常微分方程式によって求められる．

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t\,;\tau),\tau\right) \\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t\,;t) = \boldsymbol{x} \end{cases} \tag{7}$$

3. 特性法の時間離散

特性法の時間離散に線形加速度法を用いた手法[3)]を適用する．この手法は，時間増分を Δt，時間ステップ数を $\cdot^n$ とすると，以下のように表される．

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n + (1-\theta)\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}\circ\boldsymbol{X}^n \tag{8}$$

$$\begin{cases} \rho\,\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1} + \nabla p^{n+1} \\ \qquad -\nabla\cdot 2\mu\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{u}} + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1}) = \rho\boldsymbol{f}^{n+1} & (9) \\ \nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}} + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1}) = 0 & (10) \end{cases}$$

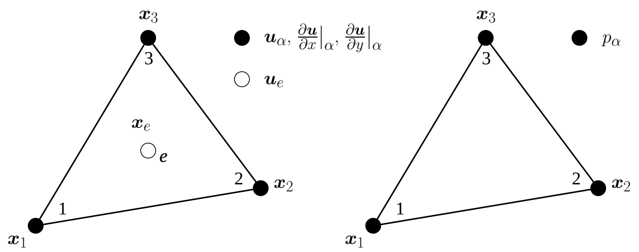
$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1} \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{X}^n\,(\equiv \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t^{n+1};t^n))$ は $\boldsymbol{x}$ を起点とする特性曲線上の上流点の位置，$\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{X}^n$，$\dot{\boldsymbol{u}}\circ\boldsymbol{X}^n$ は $\boldsymbol{X}^n$ での流速と加速度であり，合成関数として表される．また，θ は，$\theta = 1/2$ のとき時間 2 次精度の線形加速度法となり，$\theta = 1$ のとき時間 1 次精度の後退差分法となる．

ところで，野津・田端[4)]による Crank–Nicolson 型の近似による時間 2 次精度の特性有限要素法では，合成関数が粘性項，外力項，圧力項に含まれる．また，前ステップの圧力 p^n を用いることによる不安定性を改善するために，Δt の十分小さい時間 1 次精度の特性有限要素法を交互に用いている．一方，線形加速度法を用いた本手法では，合成関数の項は，式 (8) のみにしか現れない．また，圧力項は p^{n+1} のみで評価されるため，安定性に影響はなく，時間 1 次精度の特性有限要素法を挟む必要がない．

4. 混合型有限要素近似

Ω を有限要素ごとの三角形領域 Ω_e $(1 \le e \le N_{el})$ に分割する．本研究では，**図–1** に示すような，流速に Hermite 型三角形 3 次要素，圧力に三角形 1 次要素を用いた混合型有限要素近似を適用する．



図–1 流速と圧力の要素

Ω における有限要素近似を $\boldsymbol{u}_h$，p_h，Ω_e における有限要素近似を $\boldsymbol{u}_h|_{\Omega_e}$，$p_h|_{\Omega_e}$ とすると，以下のようになる．

$$\boldsymbol{u}_h|_{\Omega_e} = H_{0\alpha}\boldsymbol{u}_\alpha + H_{x\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\Big|_\alpha + H_{y\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\Big|_\alpha + H_{0e}\boldsymbol{u}_e \tag{12}$$

$$p_h|_{\Omega_e} = L_\alpha\,p_\alpha \tag{13}$$

ここで，L_α は面積座標，$H_{0\alpha}$, $H_{x\alpha}$, $H_{y\alpha}$, H_{0e} は Hermite 型三角形 3 次要素の補間関数であり，L_α の関数である．

5. 数値計算法

(1) 上流点の位置

本研究では，式 (7) を多段法によって求める．まず，$t^{n+\frac{1}{2}}$ での流速を Adams–Bashforth 法によって近似する．

$$\boldsymbol{u}_h^* = \frac{1}{2}\left(3\,\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_h^{n-1}\right) \tag{14}$$

つぎに，節点 l $(1 \le l \le N_{nd})$ の位置を $\boldsymbol{x}_l$，上流点の位置を $\boldsymbol{X}_l^n$ とし，$\left(\frac{\boldsymbol{x}_l + \boldsymbol{X}_l^n}{2}, t^{n+\frac{1}{2}}\right)$ での流速 $\boldsymbol{u}_l^{(m)}$ を以下のような反復計算によって求める．

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_l^{(m)} = \boldsymbol{u}_h^*(\boldsymbol{x}_l - \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{u}_l^{(m-1)}) \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ \boldsymbol{u}_l^{(0)} = \boldsymbol{u}_l^* \end{cases} \tag{15}$$

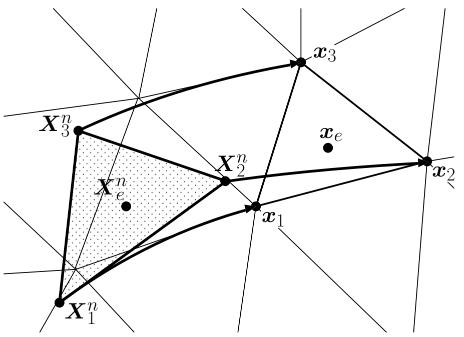
Key Words: *CFD, FEM, characteristic Galerkin, Hermite*
〒039–1192 青森県八戸市大字田面木字上野平 16–1
TEL:0178–27–7304, FAX:0178–27–7316

$m=1$ でも時間 2 次精度となる．m は少ない反復数で十分であり，本研究では $m=2$ としている．$\boldsymbol{u}_l^{(m)}$ によって，上流点の位置 $\boldsymbol{X}_l^n$ を以下のように求める．

$$\boldsymbol{X}_l^n = \boldsymbol{x}_l - \Delta t\, \boldsymbol{u}_l^{(m)} \tag{16}$$

(2)　合成関数の扱い

特性有限要素法では，定式化に必要な積分に合成関数が含まれるが，式 (12) の有限要素近似による合成関数 $\boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}^n|_{\Omega_e}$ が複数の要素にまたがるため，その積分に対して数値積分を行うなどの何らかの近似が必要になる．本研究では，合成関数の扱いを簡略化するために，**図–2** に示すように上流点の位置 $\boldsymbol{X}^n$ においても $\boldsymbol{X}_\alpha^n$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ を頂点とする Hermite 型三角形 3 次要素を構築することによって，要素ごとの合成関数を 1 つの多項式として近似する．なお，$\boldsymbol{X}_e^n$ は $\boldsymbol{X}_\alpha^n$ から求められる要素の重心とする．



図–2　上流点の位置における Hermite 型要素の構築

(3)　HCG–LA 法の定式化

$\boldsymbol{u}_h$，p_h と同様の有限要素空間の重み関数を $\boldsymbol{w}_h$，q_h とする．$\boldsymbol{w}_h$ を式 (8)(9) に，また，q_h を式 (10) に乗じ，Ω で積分することによって Galerkin 法による弱形式が得られる．

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \big(\boldsymbol{u}_h \circ \boldsymbol{X}^n + (1-\theta)\,\Delta t\, \dot{\boldsymbol{u}}_h \circ \boldsymbol{X}^n\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{w}_h \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \rho\, \dot{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nabla \boldsymbol{w}_h\, p_h^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\quad + \int_\Omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}_h) : 2\,\mu\, \boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{u}}_h + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}_h^{n+1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\qquad = \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \rho\, \boldsymbol{f}_h^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{w}_h \quad (18) \\ &\int_\Omega q_h\, \nabla\cdot(\tilde{\boldsymbol{u}}_h + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}_h^{n+1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall q_h \quad (19) \end{aligned}\right.$$

$$\boldsymbol{u}_h^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}_h + \theta\,\Delta t\,\dot{\boldsymbol{u}}_h^{n+1} \tag{20}$$

式 (18)(19) は通常の混合型有限要素法による定式化である．

式 (17) は各方向で分離でき，総自由度数は，それぞれ，$N_{nd}\times 3 + N_{el}\times 1$ となり，式 (18)(19) の総自由度数は，$N_{nd}\times 7 + N_{el}\times 2$ となる．ただし，要素ごとの自由度は，静的縮約によって消去することができる．また，連立 1 次方程式の行列は，式 (17)，式 (18)(19) とも対称化できる．

本手法では，高次の補間関数を適用しているため，係数行列の作成に複雑な積分計算が要求されるが，本研究では，この積分計算にフリーの数式処理システム Maxima[5)] を利用し，解析的に積分を行っている．さらに，Maxima では，出力結果を Fortran 形式に変換する機能があるので，Fortran 言語によるコーディングを比較的容易に行うことができる．

6.　数値実験

本手法の計算精度を評価するための数値実験を行う．

$\Omega = (0, 1)\times(0, 1)$ において，以下のような厳密解を満足するように $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{u}^0$ を与える．

$$\left\{\begin{aligned} u &= \ \ \pi\,\sin(2\pi y)\,\sin^2(\pi x)\,\sin t \\ v &= -\pi\,\sin(2\pi x)\,\sin^2(\pi y)\,\sin t \\ p &= \cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\sin t \end{aligned}\right.$$

有限要素分割は，Ω の 1 辺の分割数を N とする小正方形を対角線で二分する規則的な三角形要素分割とする．

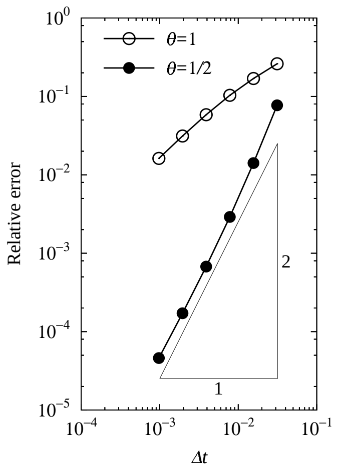
計算条件は，$N = 16, 32, 64, 128, 256$，$\Delta t = 1/(4N)$，$\theta = 1, 1/2$，$\rho = 1$，$\mu = 10^{-2}$ とする．

計算精度は，$t = 1$ での計算結果から，以下のような $H^1(\Omega)^2$ ノルムによる相対誤差によって評価する．

$$\text{Relative error} = \frac{||\boldsymbol{u}_h - \Pi_h \boldsymbol{u}||_{H^1(\Omega)^2}}{||\Pi_h \boldsymbol{u}||_{H^1(\Omega)^2}}$$

ここで，Π_h は $\boldsymbol{u}_h$ と同様の補間作用要素である．

図–3 に Δt と相対誤差の関係を示す．プロットの右上が $N = 16$，左下が $N = 256$ である．$\theta = 1$ のとき傾きが約 1 であることから時間 1 次精度であり，$\theta = 1/2$ のとき傾きが約 2 であることから時間 2 精度であるといえる．



図–3　Δt と相対誤差の関係

7.　おわりに

HCG–LA 法を 2 次元非圧縮性 Navier–Stokes 方程式に適用し，数値実験によって時間 2 次精度を実証した．

参考文献

1) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, 27, 2008.
2) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Hermitian Characteristic Galerkin 法, 日本計算工学会論文集（投稿中）.
3) 丸岡, 奥村, 流れ問題における Hermite 型要素を用いた特性有限要素法の時間離散について, 計算工学講演会論文集, 13, 2008.
4) 野津, 田端, Navier–Stokes 方程式のための 2 次精度特性有限要素スキームとその数値計算, 第 20 回数値流体力学シンポジウム, E5-3, 2006.
5) http://maxima.sourceforge.net