ALE 安定化有限要素法に基づく薄肉構造に対する流体構造連成解析

中央大学大学院 学生員 ○ 河原崎 雄介
中央大学 正会員 田中 聖三
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

流体構造連成問題とは，流体と構造物の相互作用により引き起こされる力学現象であり，この挙動を正確に把握するためには，流体と構造物の連成解析が必要不可欠となる．

著者らは，現在までに，ALE 安定化有限要素法を用い剛体を仮定した構造物に対する連成解析手法の構築[1)]及び，弾性体を仮定した構造物に対してソリッド要素を用いた連成解析手法の構築を行ってきた[2)]．一方，近年，デザイン学的および強度的に優れるシェル構造と呼ばれる薄い曲面板からなる構造物が比較的多く計画・設計されている．

本論文は，既往の ALE 安定化有限要素法に基づく流体構造連成解析手法の拡張として，近年増加が著しいシェル・薄肉構造物の取り扱いが可能となるように，構造要素として面内変形と曲げ変形を組み合わせた平面シェル要素の導入の検討を行うものである．数値解析例として，弾性板の渦振動問題を取り上げ, 構造物の応答の検討を参照解との比較により行う．

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

a) 流体の基礎方程式

ALE 記述された非圧縮粘性流体の運動方程式及び連続式はそれぞれ以下の式 **(1)**，**(2)** で表される．

$$\rho\Big(\dot{\mathbf{u}}+\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\Big)-\nabla\cdot\sigma\left(\mathbf{u},\,p\right)=0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{2}$$

ここで，ρ は密度，$\mathbf{u}$ は流速ベクトル，$\bar{\mathbf{u}}$ は相対流速ベクトル，$\mathbf{f}$ は物体力ベクトルを表している. また，応力テンソル σ は以下の式 **(3)** で表される．

$$\sigma=-p\mathbf{I}+\mu\left(\nabla\mathbf{u}+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right) \tag{3}$$

ここで，p は圧力，μ は粘性係数である．

b) 構造の基礎方程式

構造の運動方程式は以下の式 **(4)** で表され．適合条件式, 構成式は以下の式 **(5)**，**(6)**

$$\nabla\cdot\sigma-\rho\ddot{\mathbf{v}}=\mathbf{F^s}, \tag{4}$$

$$\varepsilon\left(\mathbf{v}\right)=\frac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{v}+\left(\nabla\mathbf{v}\right)^T\big), \tag{5}$$

$$\sigma=\mathbf{D}\varepsilon\left(\mathbf{v}\right) \tag{6}$$

ここで，σ，ε，$\mathbf{v}$，ρ，$\mathbf{D}$，$\mathbf{F^s}$ はそれぞれ，応力，ひずみ，変位，密度，弾性テンソル，外力荷重を表す.

(2) 有限要素方程式

a) 流体の有限要素方程式

流体の基礎方程式 **(1)**，**(2)** に対して，安定化有限要素法 (SUPG/PSPG 法)[3)] を適用し，空間方向に離散化を行うと以下の有限要素方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta\right)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\left(\mathbf{K}\left(\bar{\mathbf{u}}\right)+\mathbf{K}_\delta\left(\bar{\mathbf{u}}\right)\right)\mathbf{u}\\&-\left(\mathbf{C}-\mathbf{C}_\delta\right)\frac{1}{\rho}p+\nu\mathbf{S}\mathbf{u}-\left(\mathbf{F}+\mathbf{F}_\delta\right)=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{u}+\mathbf{M}_\varepsilon\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{K}_\varepsilon\left(\bar{\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}-\mathbf{F}_\varepsilon+\mathbf{C}_\varepsilon\frac{1}{\rho}p=0 \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{M}$，$\mathbf{K}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{S}$ は係数行列，$\mathbf{F}$ は外力ベクトルであり添字 δ，ε はそれぞれ SUPG 項，PSPG 項に起因するものを表わす．ここで，流体の時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用いる．

b) 構造の有限要素方程式

本研究では，構造部の離散化要素として，面内変形要素と曲げ変形要素を組み合わせた平面シェル要素を用いる[4)]．面内変形要素として，4 節点アイソパラメトリック要素，曲げ変形要素として，Mindlin 理論に基づく板曲げ変形要素を用い，面内変形 u,v，たわみ w，たわみ角 θ_x,θ_y に対応するように要素合成行列を組み合わせると以下のようになる．

$$\mathbf{K}^s=\begin{bmatrix}\mathbf{K}^i&\mathbf{K}^i&0&0&0&0\\\mathbf{K}^i&\mathbf{K}^i&0&0&0&0\\0&0&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&0\\0&0&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&0\\0&0&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&\mathbf{K}^m&0\\0&0&0&0&0&\mathbf{K}^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\\\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix} \tag{9}$$

ここで，添え字 i，m，t はそれぞれ，面内変形，曲げ変形，z 軸周りのたわみ角に起因するものを表している．また，z 軸周りのたわみ角の剛性に関しては Zienkiewicz らが提案している，仮想剛性を付加した[5)]．また，質量行列に関しても同様に組み合わせることで，以下の構造の有限要素方程式が得られる．

$$\mathbf{M}^s\ddot{\mathbf{v}}+\mathbf{K}^s\mathbf{v}=\mathbf{F}^s \tag{10}$$

なお，構造の時間方向の離散化として, Newmark-β 法を用いる．

(3) 構造と流体の連成解析手法

安定化を施された式 **(7)** は以下の式 **(11)** のように書き換えることができる．

$$\tilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{u}}+\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{G}}p=\tilde{\mathbf{F}} \tag{11}$$

式 **(11)** における，解析領域全体の節点に関する変数ベクトル $\mathbf{u}$，$\tilde{\mathbf{F}}$ を移動境界上 α とそれ以外の領域 γ に区別し，移

KeyWords： ALE 安定化有限要素法，流体構造連成解析，平面シェル要素
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL 03-3817-1815 E-Mail kawarasaki@civil.chuo-u.ac.jp

動境界上の幾何学的連続条件及び，平衡状態を考慮した流体の運動方程式 **(7)**，連続式 **(8)** 及び，構造の運動方程式 **(10)** は以下のように表される．

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha\alpha} & \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha\gamma} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma\alpha} & \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{\alpha\alpha} & \tilde{\mathbf{K}}^{\alpha\gamma} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{\gamma\alpha} & \tilde{\mathbf{K}}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}^{\alpha} \\ \tilde{\mathbf{G}}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^{\alpha} \\ \tilde{\mathbf{F}}^{\gamma} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}^{\alpha}_{\varepsilon} & \tilde{\mathbf{M}}^{\gamma}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^{\alpha} & \tilde{\mathbf{C}}^{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\alpha} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_{\varepsilon} p = \mathbf{F}_{\varepsilon} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}^{s}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}^{s}\mathbf{v} = -\mathbf{F}^{\gamma} \quad (14)$$

なお，本研究では，連成手法として弱連成法を用いる．

3. 数値解析例

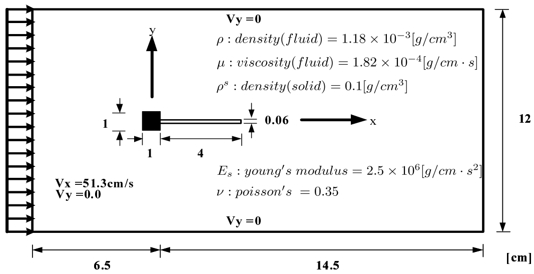
数値解析例として，弾性板の渦振動問題を取り上げる．解析モデル及び計算条件を **図－１** に示す．計算条件は Wall[6] が用いた計算条件と同様である．構造部は平面シェル要素によりモデル化し，構造物境界上では流体メッシュにおける節点を２重節点とした．**図－２** に弾性板周辺の渦度分布を示す．角柱から発生した非対称性の渦によって，弾性板が大きく変形している様子が伺える．また，そのような大きな振動であっても，安定に解析を行うことができた．次に，弾性板右端の変位の時刻歴を **図－３** に示す．振動の開始時に差異が見られるが，その後の振動振幅に関して，Wall らの参照解と概ね良い一致を示している．また，**図－４** に要素形状，分割による振幅・周波数の変化をグラフにしたものを示す．まず，振動周波数に関して，四角形１次要素では，分割を細かくすることで，参照解に近い値に収束するが，平面シェル要素では，粗い分割で，参照解に近い値が得られている．続いて平均振幅に関しては，両要素共細かくすることで，収束に向かうが，平面シェル要素に関して，四角形１次要素に比べ，粗い分割で収束している．

4. おわりに

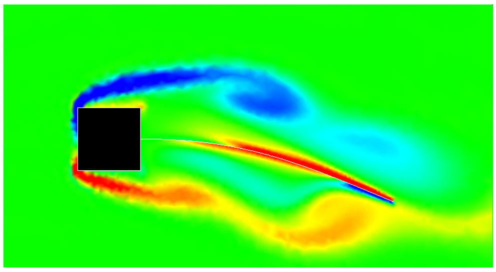
本報告では，ALE 安定化有限要素法に基づく薄肉構造に対する流体構造連成解析手法の構築を目的として，シェル要素の導入を行い，数値解析例を通じて以下の結論を得た．

- 平面シェル要素を適用した弾性板の渦振動問題において，連成解析を安定に行うことができた．
- 単純な四角形１次要素に比べ，平面シェル要素は精度の良い結果が得られた．

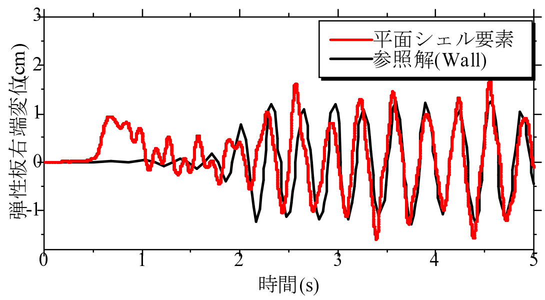
今後，構造部によりフレキシブルな挙動が生じる連成問題への適用，加えて，流体部に自由表面を有する連成問題の解析を行う予定である．



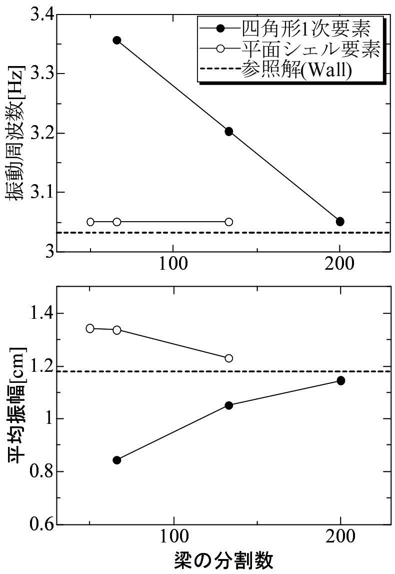
図－１　解析領域と境界条件



図－２　弾性板周辺の渦度分布



図－３　弾性板右端変位の時刻歴



図－４　要素形状，分割による周波数・振動振幅の変化

参考文献

1) 河原崎雄介，田中聖三，樫山和男：渦励振動問題における流体-構造連成解析手法の比較検討：土木学会関東支部技術研究発表会概要集 (CD-ROM)：**34**,2007.
2) 河原崎雄介，田中聖三，樫山和男：ALE 安定化有限要素法に基づく流体構造連成解析手法の構築：土木学会年次学術講演会概要集 (CD-ROM) ：**62**,2007.
3) T.E.Tezduyar,et al:Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations,*Advanced Appl Mech***28**,pp1-44,1992.
4) 鷲津久一郎，宮本博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦:有限要素法ハンドブック (基礎編):培風館:1981
5) O.C.Zienkiewicz:'The Finite Element Method in Engineering Science'*McGraw-Hill*, 1971
6) Wall,W.A.Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen:PhD thesis,Universit at Stuttgart,1999