

半無限周期構造における波動伝播特性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 笠原 祐樹
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

周期構造における波動問題は、様々な工学分野において重要であり、多くの研究者により解析が試みられている。ただし、周期構造を2次元的に展開して得られる無限波動場を対象としているものはあるが、複合材料のように2次元的に周期構造が繰り返されている半無限場を対象とした表面波モードの解析例は見当たらない。波動問題において、境界面に沿って伝播する表面波モードの把握は、多くの工学問題において重要となる。本研究では、2次元半無限周期構造を対象とした表面波モード解析手法の構築を試みる。

2. Floquet 変換の2次元周期構造への拡張

本研究において解析に用いる2重 Floquet 変換について概要を説明する。図1のように $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ で特徴付けられる周期性を持った2次元周期構造を考える。このとき、線形作用素 $\mathcal{L}$ は次の第1種周期性をみたす。

$$\mathcal{L}(\mathbf{x} + n_j \mathbf{d}_j) = \mathcal{L}(\mathbf{x}), \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

なお、繰返し指標は総和規約に従うものとする。

関数 $f(\mathbf{x})$ の(2重)Floquet 変換を次式で定義する¹⁾。

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(\tilde{\mathbf{x}} + n_j \mathbf{d}_j) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}$ はユニットセル S_d 内の点、 $\boldsymbol{\kappa}$ は Floquet 波数ベクトルである。

$\tilde{f}$ は $\tilde{\mathbf{x}}$ について次の第2種周期性を有する。

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}} + n_j \mathbf{d}_j, \boldsymbol{\kappa}) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot n_j \mathbf{d}_j} \quad (3)$$

3. 半無限周期構造における表面波モード解析法

図1の半無限場と同じ周期性を持つ無限場を考える。この無限領域の加振問題は、式(2)の2重 Floquet 変換によりユニットセル S_d 上の問題に帰着して解くことができる。本研究では、その解析に有限要素法を用いるものとする。今、具体的な問題として、自由表面に相当する無限場内の直線 (x_1 軸) に接して位置している1つのユニットセルの x_1 軸上にある節点 i を、調和加振する場合を設定する。こ

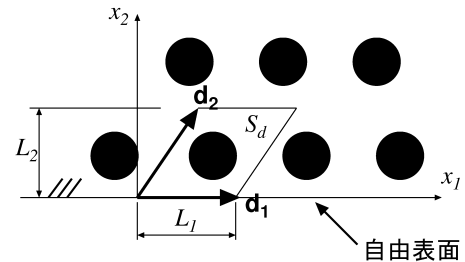


図1 半無限周期構造

の問題における運動方程式の2重 Floquet 変換は次式により与えられる。

$$[\tilde{\mathbf{K}}(\kappa_1, \kappa_2) - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}(\kappa_1, \kappa_2)] \{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (4)$$

ここで、 ω は加振円振動数、 $[\tilde{\mathbf{K}}], [\tilde{\mathbf{M}}]$ はユニットセル S_d を有限要素分割して得られる剛性行列と質量行列に対し、解が式(3)の第2種周期性をみたすように組み換え処理を施して得られる行列である²⁾。

式(4)を解くことにより、 $\{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\}$ を得る。 $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$ より、 κ_2 方向にのみ逆 Floquet 変換して得られる解を次式で定義する。

$$\{\hat{\mathbf{U}}(\kappa_1; \omega)\} = \frac{L_2}{2\pi} \int_0^{2\pi/L_2} \{\tilde{\mathbf{U}}(\kappa_1, \kappa_2; \omega)\} d\kappa_2 \quad (5)$$

$\{\hat{\mathbf{U}}\}$ は円振動数 ω および x_1 軸方向 Floquet 波数 κ_1 の下での定常解を与える。この変位解から得られる当該ユニットの内部節点力ベクトルを $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ とおく。なお、 $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ は次式により求めることができる。

$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = [\hat{\mathbf{K}}(\kappa_1) - \omega^2 \hat{\mathbf{M}}(\kappa_1)] \{\hat{\mathbf{U}}\} \quad (6)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}], [\hat{\mathbf{M}}]$ は x_1 軸方向にのみ第2種周期性を課して得られるユニットセル S_d の剛性行列と質量行列である。

x_1 軸上の節点 i を加振して得られた解 $\{\hat{\mathbf{U}}\}, \{\hat{\mathbf{F}}\}$ から、 x_1 軸上に位置する節点に関する成分のみ抽出して得られる部分ベクトルを各々 $\{\tilde{\mathbf{U}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$ とおく、ユニットセル内の x_1 軸上に位置する各節点 i に対して $\{\tilde{\mathbf{U}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$ を順次求め、それらを列成分に持つ正方形行列 $[\tilde{\mathbf{U}}], [\tilde{\mathbf{F}}]$ を構成する。ここで、半無限周期構造の (κ_1, ω) 空間における表面

keywords: 表面波, 周期構造, Floquet 変換

連絡先: 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地

TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

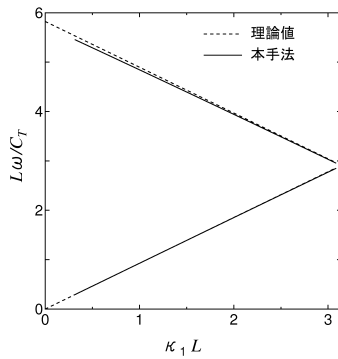
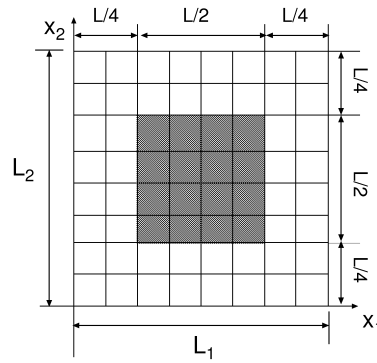
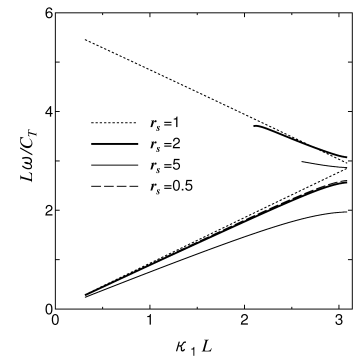


図 2 Rayleigh 波の分散曲線

図 3 正方介在物を有する
ユニットセル図 4 正方介在物を有する
周期構造の分散曲線

節点変位と節点力との関係を与えるインピーダンス行列を $[\bar{\mathbf{K}}]$ とすると、次式が成り立つ．

$$[\bar{\mathbf{K}}][\bar{\mathbf{U}}] = [\bar{\mathbf{F}}] \quad (7)$$

したがって、表面波モードを与える条件は、式 (7) から次式により判定することができる．

$$\det[\bar{\mathbf{K}}] = \frac{\det[\bar{\mathbf{F}}]}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} = 0 \quad (8)$$

なお、分散解析 (式 (8) の判定) は $0 < \kappa_1 < \pi/L_1, 0 < \omega$ で与えられる領域内でのみ実行すればよい．

また、式 (5) の逆 Floquet 変換において特異積分の処理が必要となる．式 (5) の κ_2 に関する積分区間上の特異点において、 $\kappa_2 - \omega$ 平面の分散曲線の傾きの正負により積分経路を複素平面内で迂回させることにより対応している．

4. 解析結果

(1) 一様半無限場

本研究で構成した手法の妥当性を確認する目的で、まず本手法を一様半無限場に適用する．解析では平面ひずみ条件の下、ポアソン比を 0.3 とした．ここでは、ユニットセルを $L_1 = L_2 = L$ の正方形で与え、それを 4 節点矩形要素により 8×8 に等分割した．

ω について低い方から 2 番目までの分散曲線を求めた結果を図 2 に示す．なお、当該問題における表面波 (Rayleigh 波) の分散曲線は、 $\omega = C_R k_1$ ($C_R \approx 0.927 C_T$) で与えられる．Floquet 波数 κ_1 と通常の波数 k_1 との対応関係より、Rayleigh 波の波数 k_1 を κ_1 に変換して図中に示している．本解析により求めた分散曲線は理論値と良好な一致を示しており、提案手法の妥当性が確認できる．

(2) 介在物を有する場合

図 3 のユニットセルで与えられる半無限周期構造を対象に、本手法を適用し表面波モードを求めた．周期構造を与える基底ベクトルはそれぞれ x_1, x_2 軸に平行で $|\mathbf{d}_i| = L$

と設定した．なお、母材に対する介在物の剛性比 r_s と質量密度比とを等しい値に設定している．また、何れのポアソン比も 0.3 で与えた．ユニットセルの要素分割は上述の一樣半無限場の解析と同じく各辺 8 等分割で与え、その他の諸パラメータも全て同じとした．剛性比 $r_s = 0.5, 2, 5$ に対して求めた表面波の分散曲線を、Rayleigh 波のそれと合わせ図 4 に示す．本解析では、下から 2 本目の分散曲線の途中で行列式 (8) のゼロ点が消滅し、探索不能となった．

特に介在物の剛性を母材より低く設定した $r_s = 0.5$ のケースにおいては、2 本目の曲線の開始点のみ検出できたものの、分散曲線は探索できなかった．これについては今後より詳細な検討が必要である．

図 4 より、介在物の剛性を変えることで、 $\kappa_1/L = \pi$ において上下の分散曲線が分離し、その間隔が剛性比の増減と共に増大することがわかる．この様に、表面波モードが存在しない周波数帯であるストップバンドが、無限波動場同様に半無限場においても発生することが確認できる．

5. まとめ

本研究では半無限周期構造における表面波モードの分散解析手法を構成した．その際に周期構造における波動場解析に、2 重 Floquet 変換を適用した．

一樣半無限場における Rayleigh 波の解析に本手法を適用することで、解析精度と手法の妥当性を検証した．また、周期構造においては、高周波数域でのモード探索に未だ困難な点が認められるものの、最初のストップバンドを捉えることができ、本手法の適用可能性を確認できた．

なお、高周波数域でモード探索が困難となる原因については明らかでなく、今後検討が必要である．

参考文献

- 1) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: *J. sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 2) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.