

直交選点有限要素法への四角形要素の適用に関する考察

－ Stokes 方程式への応用 －

函館工業高等専門学校環境都市工学科
函館工業高等専門学校環境システム工学専攻

正会員 大久保 孝樹
学生会員 ○大坂 健嗣

1. はじめに

直交選点法は、1930 年代 Lanczos が選点法の選点配置を直交多項式の根の値として選点位置を規定したことにより、低次の解であっても直交選点においてほぼ正解に近い値が得られることが分かり、コンピュータの発達していなかったこの年代の有力な数値計算手法として用いられていた。直交選点法は、初期値問題として 1930～1960 年代、Clenshaw, Norton, Wright らによって用いられ、その後 1960 年代 Villadsen, Stewart らによって境界値問題に適用されるに至った。

直交選点有限要素法とは、直交選点法を有限要素法に適用し、2 次元空間の離散化手法としたものである。直交選点有限要素法の利点としては、定式化・高精度である高次の計算が容易であること、直交選点において正解に近い値が得られることなどが挙げられる。

従来の直交選点有限要素法では長方形要素による流れ解析を行ってきたが、四角形要素による詳細な解析は行っていない。本研究では四角形要素を用いた流れ解析を行うことで、直交選点有限要素法への四角形要素の適用の可能性を考察するため、局所座標系から一般座標系への直交選点法による座標変換マトリックスの作成を行い、曲がりダクトモデルを用いて解析を行った。

2. Stokes 方程式

連続の式と Stokes 方程式を式(1)、 u , v , p の要素境界条件を式(2)に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & \left(-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)m &= Sx' \\ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= 0 & \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)l + \left(-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y}\right)m &= Sy' \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= 0 & \frac{\partial p}{\partial x} l + \frac{\partial p}{\partial y} m &= Sp' \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

3. 直交選点有限要素法

3.1 直交選点法の微分作用素行列について

従来までは、ラグランジュ補間式を用いず、直接的に行列を用いて計算したため、高次の場合、正確な微分作用素行列が得られなかった。

形状関数として $l_i(x)$ が考えられる。補間関数 $y^N(x)$ は以下のように形状関数によって表現される。

$$y^N(x) = \sum_{i=1}^{N+1} l_i(x) y(x_i) \quad l_i(x) = \psi(x) / [(x - x_i) \psi'(x_i)]$$

ここで、 $\psi = x(1-x) \prod_{j=1}^{N-1} (x - x_j)$

これを 2 次元に拡張すると、

$$u^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i(x) l_j(y) u(x_i, y_j)$$

となる。ここで $M_{ij} = l_i(x) l_j(y)$ とおくと、

$$u^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} M_{ij} u(x_i, y_j)$$

となる。よって、

$$M_{ij} = l_i(x) l_j(y) = \psi(x) \psi(y) / [(x - x_i) \psi'(x_i) \cdot (y - y_j) \psi'(y_j)]$$

となる。

$u^N(x, y)$ の x, y による偏微分は式(3)のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u^N(x, y) &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i'(x) l_j(y) u(x_i, y_j) & \therefore Ax_{ijkl} &= l_i'(x_k) l_j(y_l) \\ \frac{\partial}{\partial y} u^N(x, y) &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i(x) l_j'(y) u(x_i, y_j) & \therefore Ay_{ijkl} &= l_i(x_k) l_j'(y_l) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^N(x, y) &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i''(x) l_j(y) u(x_i, y_j) & \therefore Bx_{ijkl} &= l_i''(x_k) l_j(y_l) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^N(x, y) &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i(x) l_j''(y) u(x_i, y_j) & \therefore By_{ijkl} &= l_i(x_k) l_j''(y_l) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u^N(x, y) &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} l_i'(x) l_j'(y) u(x_i, y_j) & \therefore Cx_{ijkl} &= l_i'(x_k) l_j'(y_l) \end{aligned} \quad (3)$$

よって、直交選点法の微分作用素行列は式(3)となる。ここでは u について示しているが、 v , p についても同様に表すことができる。

3.2 直交選点法による Stokes 方程式の定式化

式(1)、(2)に式(3)を代入することで、直交選点法によって式(4)、(5)のように定式化される。

$$\begin{aligned} \overline{A_x} u + \overline{A_y} v &= 0 & \left(-\overline{p} + \frac{2}{\text{Re}} \overline{A_x} u\right)l + \frac{1}{\text{Re}} \left(\overline{A_y} u + \overline{A_x} v\right)m &= S_x' \\ \overline{A_x} p - \frac{1}{\text{Re}} \left(\overline{B_x} u + \overline{B_y} v\right) &= 0 & \frac{1}{\text{Re}} \left(\overline{A_y} u + \overline{A_x} v\right)l + \left(-\overline{p} + \frac{2}{\text{Re}} \overline{A_y} v\right)m &= S_y' \\ \overline{A_y} p - \frac{1}{\text{Re}} \left(\overline{B_x} u + \overline{B_y} v\right) &= 0 & \overline{A_x} pl + \overline{A_y} pm &= S_p' \end{aligned} \quad (4) \quad (5)$$

3.3 座標変換マトリックス

局所座標系から一般座標系への u における座標変換マトリックスを式(6)に示す。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.4 一般座標系の直交選点有限要素法による定式化

局所座標系から一般座標系への座標変換マトリックスを J_{kli} ($k=1\sim s, l=1\sim s, i=1\sim(N+2)(N+2)$) とおくと, Stokes 方程式は式(7)で表される

$$\begin{aligned} & (ian = (N+2)(N+2)). \\ & \sum_{j=1}^{ian} (J_{11i} A_{\xi ij} + J_{12i} A_{\eta ij} + J_{13i} B_{\xi ij} + J_{14i} B_{\eta ij} + J_{15i} C_{\xi \eta ij}) u_j \\ & + \sum_{j=1}^{ian} (J_{21i} A_{\xi ij} + J_{22i} A_{\eta ij} + J_{23i} B_{\xi ij} + J_{24i} B_{\eta ij} + J_{25i} C_{\xi \eta ij}) v_j = 0 \\ & \sum_{j=1}^{ian} (J_{11i} A_{\xi ij} + J_{12i} A_{\eta ij} + J_{13i} B_{\xi ij} + J_{14i} B_{\eta ij} + J_{15i} C_{\xi \eta ij}) p_j \\ & - \frac{1}{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{ian} (J_{31i} A_{\xi ij} + J_{32i} A_{\eta ij} + J_{33i} B_{\xi ij} + J_{34i} B_{\eta ij} + J_{35i} C_{\xi \eta ij}) u_j \right. \\ & + \sum_{j=1}^{ian} (J_{41i} A_{\xi ij} + J_{42i} A_{\eta ij} + J_{43i} B_{\xi ij} + J_{44i} B_{\eta ij} + J_{45i} C_{\xi \eta ij}) v_j \left. \right\} = 0 \\ & \sum_{j=1}^{ian} (J_{21i} A_{\xi ij} + J_{22i} A_{\eta ij} + J_{23i} B_{\xi ij} + J_{24i} B_{\eta ij} + J_{25i} C_{\xi \eta ij}) p_j \\ & - \frac{1}{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{ian} (J_{31i} A_{\xi ij} + J_{32i} A_{\eta ij} + J_{33i} B_{\xi ij} + J_{34i} B_{\eta ij} + J_{35i} C_{\xi \eta ij}) v_j \right. \\ & + \sum_{j=1}^{ian} (J_{41i} A_{\xi ij} + J_{42i} A_{\eta ij} + J_{43i} B_{\xi ij} + J_{44i} B_{\eta ij} + J_{45i} C_{\xi \eta ij}) u_j \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

4. プレプロセッシング

曲がりダクトモデルにおいて, 高次・低要素の計算は従来の自動要素選点配置プログラム¹⁾(図-1)を用い, 低次・高要素の計算はデローニ四角形要素自動分割プログラム²⁾(図-2)を用いて要素分割と選点配置を行った. 図-1は要素数 32, 選点数 1261, 内部選点数 5×5 , 図-2は要素数 292, 選点数 365, 内部選点数 1×1 の要素選点配置図である.

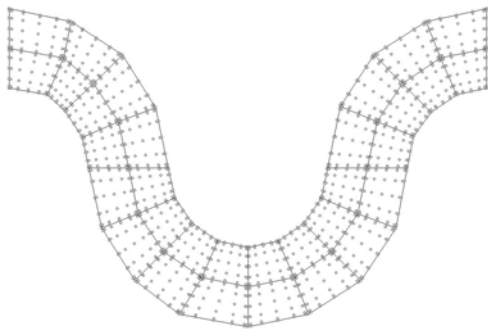


図-1 モデルの要素選点配置(高次・低要素)

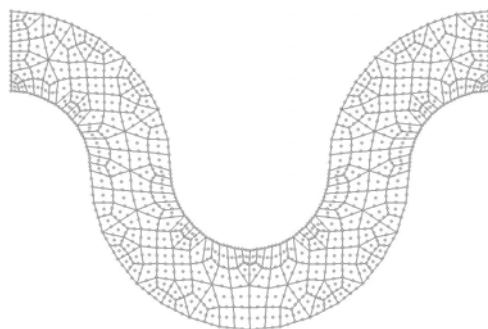


図-2 モデルの要素選点配置(低次・高要素)

5. 計算結果と考察

本研究で設定したレイノルズ数は 0.00001~500 の定常流として流れ解析を行った. 図-3, 図-4は高次・

低要素による流速ベクトル図 ($Re = 1, 0.001$), 図-5, 図-6は低次・高要素の流速ベクトル図 ($Re = 1, 0.001$) を示している. 計算結果において, 高次・低要素(内部選点 5×5)による解析では流速ベクトルに局所的な変化が生じたが, デローニ四角形要素分割による低次・高要素(内部選点 1×1)の解析では変化は生じなかった. その理由としては, 実際の流れが急激に変化している場合, 低次(内部選点 1×1)では1選点での値を通るので滑らかになると考えられるが, 高次ではその高次関数が振動すると推察できる. 仮に, 実際の流れが急激に変化していないとするならば, 低次・高要素の解が妥当な結果といえる. なお, Stokes 式はレイノルズ数の小さい範囲内 ($Re \ll 1$) でなりたつものといわれている³⁾.

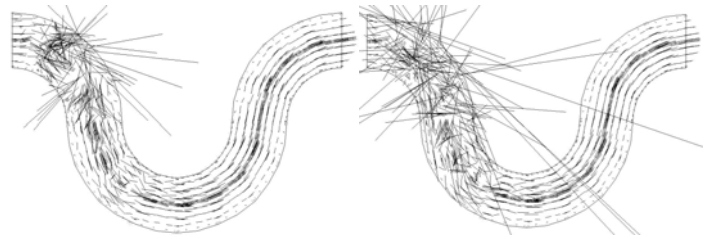


図-3 高次・低要素 ($Re = 1$)

図-4 高次・低要素 ($Re = 0.001$)

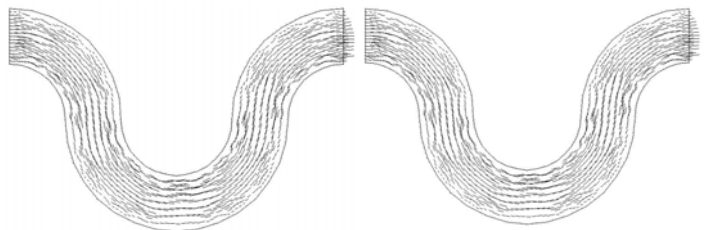


図-5 低次・高要素 ($Re = 1$)

図-6 低次・高要素 ($Re = 0.001$)

6. まとめ

四角形要素を用いた曲がりダクトモデルの流れ解析では, 高次・低要素で流速ベクトルに大きな変化が生じ, 低次・高要素の場合, 流速ベクトルは滑らかに分布している. 要素間の計算をフレキシブルに行うために高要素で行う方が妥当な結果が得られると考えられる. しかし, 粘性力が極端に大きい場合, 壁面の摩擦などの影響を受け, 実際の流れでは高次・低要素の解析結果のように大きな流速の変化が生じる可能性もあるので, これについては流体実験において確認する計画である.

7. 今後の課題

今後は, 直交選点法の四角形要素に関する理論的考察と数値実験のケーススタディーを行うとともに, 実際の流体実験を行い検証する考えである.

参考文献

- 1) 蛸子翼: 直交選点有限要素法による Navier-Stokes 方程式の数値解析に関する基礎的研究
- 2) 谷口健男: FEM のための要素自動分割, 森北出版
- 3) 安藤常世: 工学基礎 流体の力学 p87~p88, 培風館