

メッシュフリー法における異種材料界面のモデル化手法

山梨大学 正会員 吉田純司
山梨大学 フェロー会員 杉山俊幸

1. はじめに

メッシュフリー法は、従来の有限要素法にみられる要素を用いず、節点情報のみから近似を行うため、メッシュの作成を必要としない利点を有している。しかしその反面、領域積分や変位境界条件処理などが煩雑であることが知られており、これまで様々な手法が提案されている¹⁾。また近似解が滑らかになることから、材料界面でのひずみの不連続性を表現することが困難であり、そのモデル化には形状関数を補正する手法などが知られている^{2),3)}。

本研究では、領域積分と変位境界条件処理の問題を効率的に実施可能な既往のメッシュフリー法を応用し、新たな材料界面のモデル化手法を提案する。以下では、まず本研究で用いた Reproducing Kernel Particle Method(RKPM)について紹介する。本研究の RKPM では、高精度で効率的な安定化整合節点積分法を採用している。次にこの節点積分法の枠組みにおいて異種材料界面のモデル化手法を提案する。

2. RKPM の概要

(1) RKPM の形状関数

RKPM では、変位ベクトルの近似解 $\tilde{\mathbf{u}}$ を座標 $\mathbf{x}$ の関数として

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_I \quad (1)$$

のように表す。ただし、 Ψ_I 、 $\mathbf{u}_I$ はそれぞれ節点 I の形状関数および係数ベクトル、 NP は総節点数である。本研究では、変位境界条件の付与を容易にするために、変位境界に位置する節点にのみ係数値を内挿する形状関数⁴⁾を用い、内部節点については通常の形状関数¹⁾を用いている。

(2) Galerkin 法による離散化

超弾性体を対象とする場合に、固体問題において、仮想仕事の原理から得られる弱形式は、

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

と表すことができる。ただし、 $\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u})$ は外力のなした仮想仕事、 Ω は物質配置における解析領域、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルである。

本研究では、式(2)の離散化に高精度でかつ計算効率がよい安定化整合節点積分法⁵⁾を用いることとした。具体的な手順は以下のようなになる。

まず、解析領域に分布する節点を用いて領域を Voronoi 分割し、節点の代表領域を定める。以下で

は任意の節点 L を対象とし、図-1 に示すようにその座標を $\mathbf{x}_L$ 、代表領域を Ω_L 、 Ω_L の境界を Γ_L とおく。次に節点の代表領域においてひずみ仮定法を導入し、その領域でひずみテンソルが一定値：

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}(\mathbf{x}_L) &:= \frac{1}{2A_L} \int_{\Omega_L} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{2A_L} \int_{\Gamma_L} (\tilde{u}_i n_j + \tilde{u}_j n_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

であると仮定する。ただし、 A_L は Ω_L の体積(面積)、 $\mathbf{n}$ は Γ_L における外向き単位法線ベクトルを表す。最後に、代表領域 Ω_L における弱形式では、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ およびそれを基にした量を、すべて式(3)の $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}_L)$ に置き換えて離散化を行う。

3. 異種材料界面のモデル化手法

(1) モデル化の手順

上述した安定化整合節点積分法では、節点の代表領域を FEM の要素のように用いることから、本研究では FEM での考え方と同様の手法を提案する。具体的な手順は以下のようなになる。

- 材料界面に位置するよう節点を配置する。
- 材料界面に位置する各節点の代表領域を材料ごとに分解し、別々に領域積分する。
- 材料ごとに、それに属する節点の形状関数のみから近似を行う。

手順 a), b) の概要をそれぞれ図-2、図 3 に示す。本手法では、材料界面に一部が含まれる代表領域を界面に沿って分割し、それぞれの領域の材料特性にしたがって剛性マトリクスを作成し重ね合わせる。

(2) 数値解析例

以下に示す数値解析例では、材料は等方性の線形弾性体とし、解析は 2 次元の平面ひずみを仮定して実施している。

a) 円孔を有する平板の引張り変形

まず、開発した RKPM の解析コードを検証するため、厳密解が知られている円孔平板の応力集中問題を対象とした。対象の概要を図-4 に、解析領域の節点分布と代表領域を図-5 に示す。ただし、解析ではヤング率を $2.1 \times 10^6 [\text{N/mm}^2]$ 、ポアソン比を 0.3 としている。

図-5 は、 x_2 軸に沿った応力 σ_{11} の分布を示しているが、図より本 RKPM は、厳密解とほぼ一致していることがわかる。

キーワード：メッシュフリー法、材料界面、RKPM、二次元解析、安定化整合節点積分法

連絡先：〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11, TEL: 055-220-8521, FAX: 055-220-8773, e-mail: jyoshida@yamanashi.ac.jp

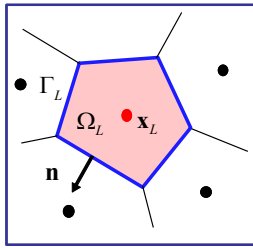


図-1 節点の代表領域と関連する量

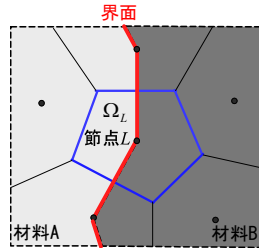


図-2 材料界面での様子

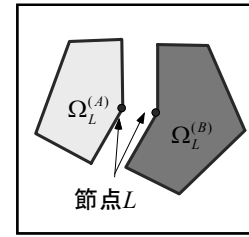


図-3 材料界面での代表領域の分割

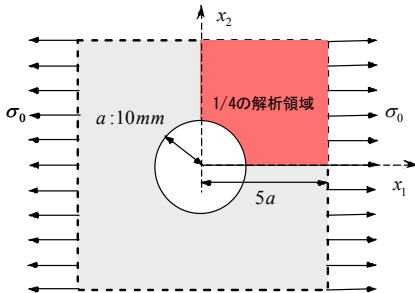


図-4 円孔平板の引張り変形問題の概要

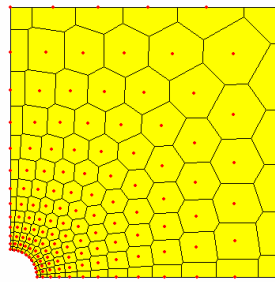


図-5 円孔問題における節点配置とVoronoi分割による代表領域

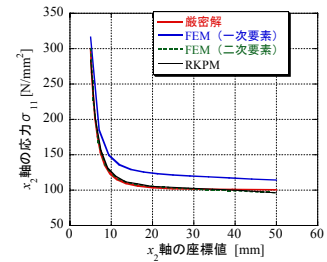
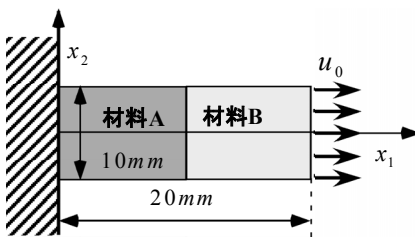
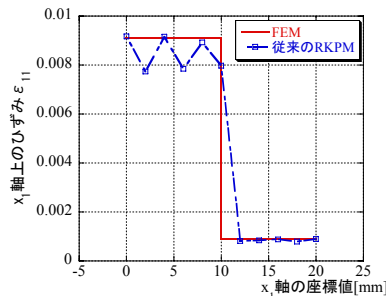
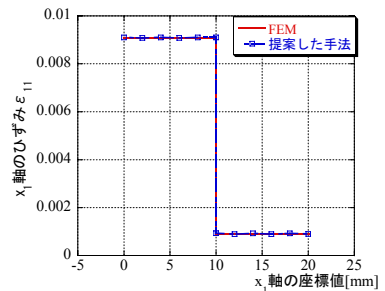
図-6 円孔問題における x_2 軸に沿った応力 σ_{11} の分布の比較

図-7 異種材料を接合した片持ち梁

図-8 通常の RKPM で得られた x_1 軸上のひずみ ε_{11} の分布図-9 本手法を用いた RKPM で得られた x_1 軸上のひずみ ε_{11} の分布

b) 異種材料を接合した梁の引張り変形

図-7に示すように2つの材料Aと材料Bを中心で接合した片持ち梁の右端部に引張り変位 u_0 を与える解析を実施した。ただし、材料A,Bのヤング率は、それぞれ $2.1 \times 10^6 [\text{N/mm}^2]$ および $2.1 \times 10^7 [\text{N/mm}^2]$ とし、ポアソン比はともに0とした。

図-8、図-9は、それぞれ従来のRKPMで解析した場合と、上述した界面のモデル化手法を取り入れたRKPMで解析した場合の x_1 軸に沿ったひずみ ε_{11} についてFEMでの解析結果との比較を示している。これらの図より、提案した手法によりひずみの不連続性を精度よく再現できていることがわかる。

4. まとめ

本研究では、メッシュフリー法(RKPM)において、安定化整合節点積分法の枠組みで異種材料界面のモデル化手法を提案した。本手法は節点の代表領域を界面に沿って分割し、かつそれぞれの材料が占める領域で近似を実施する簡易な方法である。二次元の簡単な数値解析例を通して従来の手法と比較

したところ、材料界面を精度良くモデル化できることがわかった。

参考文献

- 1) Li, S. and Liu, W.K.: *Meshfree Particle Methods*, Springer, 2004.
- 2) Krongauz, Y. and Belytschko, T.: EFG approximation with discontinuous derivatives, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, Vol.41, pp.1215-1233, 1998.
- 3) 橋本学, 野口裕久: Moving Least Squares-Smoothed Particle Hydrodynamics 法による水中爆発問題の数値解析, 日本計算工学会論文集, No.20070030, 2007.
- 4) Chen, J.S., Han, W. You, Y. and Meng, X.: A reproducing kernel method with nodal interpolation, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, Vol.56, pp.935-960, 2003.
- 5) Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y.: A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods, *International Journal for Numerical methods in Engineering*, Vol.50, pp.435-466, 2001.