

非圧縮超弾性体における変形特性の最適化

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 小坂橋 智哉
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

鉄道軌道に用いられるゴムパッドの防振性能向上を最終目標とし、これまでに構成してきた VOF 法を用いたトポロジー最適化手法の大変形非圧縮超弾性体への適用を試みてきた¹⁾。

防振パッドに課される重要な力学性能として剛性が挙げられる。本研究では予め荷重-変位曲線を規定し、所定の性能を有する形状の探索を試みる。

2. 非圧縮超弾性体の大変形解析

従来の密度法では、Euler メッシュ下における各有限要素の材料密度を設計変数としている。そのためトポロジー変化を意識する必要がないという利点がある反面、中間密度の発生により物体境界が曖昧になったり、材料分布が振動するチェッカーボード現象が発生するなどの問題があった。これらの問題点を解決し得る手段として VOF 法を用いた最適化法を採用する。

VOF (Volume Of Fluid) 法では、Euler メッシュ下の要素毎に物質の占有率を VOF 関数 ψ で与えて物体領域を表現し、剛性を ψ に比例するように与える。大変形下における非圧縮超弾性体の最適化では、孔までもが非圧縮となり、内部に圧力が発生するなど適切な形状を求めることが容易ではない。そこで、本来物質の存在しない領域については圧縮性線形弾性体で表現し問題点の回避を図る。有限要素方程式は非圧縮超弾性体と線形弾性体の重み平均で次のように与える¹⁾。

$$a(\mathbf{u}, p, \delta \mathbf{u}; \psi) = L(\delta \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$b(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) + R(\mathbf{u}, p, \delta p; \psi) = 0$$

$$a = \int_{\bar{\Omega}} \psi \left(\omega_1 \frac{1}{2} \mathbf{S} : \delta \mathbf{C} + \omega_2 2G \boldsymbol{\epsilon} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \right) d\Omega - \int_{\bar{\Omega}} p \left[\omega_1 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} : \delta \mathbf{C} + \omega_2 \frac{3\nu}{1+\nu} \text{tr}(\delta \boldsymbol{\epsilon}) \right] d\Omega, \quad (2)$$

$$b = \int_{\bar{\Omega}} \left\{ \omega_1 \psi G (1 - J) + \omega_2 \left[p + \psi \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \right] \right\} \delta p d\Omega, \quad (3)$$

$$R = \sum_e \tau \int_{\Omega_e} \left\{ \omega_1 2 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} : [(\nabla p) \otimes (\nabla \delta p)] + \omega_2 [(\nabla \delta p) \cdot (\nabla p)] \right\} d\Omega \quad (4)$$

ここで ω_1, ω_2 は ψ の関数であり、それぞれ非圧縮超弾性体と線形弾性体の方程式の重み係数で $\omega_1 + \omega_2 = 1$ を満たす。なお、 $\boldsymbol{\epsilon}, \nu, G$ は線形弾性体の微小ひずみとポアソン比、ならびにせん断弾性係数、 $\mathbf{C}, J, \mathbf{S}$ は非圧縮超弾性体の右 Cauchy-Green テンソル、体積変化率、および第二 Piola-Kirchhoff 応力を示す。また、 $\mathbf{u}$ は変位、 p は圧力、 $\bar{\Omega}$ は設計領域、 τ は安定化項、 $L(\delta \mathbf{u})$ は外力項である。

3. VOF 法による形状最適化

(1) 目的関数

目的関数 $\bar{J}$ を各変位増分での荷重と、規定された荷重との差から以下のように設定し、その最小化問題を設定する。

$$\bar{J} = \int_0^T j dt := \int_0^T (F - \bar{F})^2 dt \quad (5)$$

ここで、 $j = (F - \bar{F})^2$ 、 F は押し込み変位が規定されている物体境界 Γ_a における反力の合力、 $\bar{F}$ は規定荷重である。また、 t は载荷過程に対応する時間パラメータである。

節点力ベクトルを $\mathbf{f}$ とすると、 Γ_a 上の合力 F は次式で表される。

$$F = [\mathbf{b}]\{\mathbf{f}\} \quad (6)$$

ここで、 $[\mathbf{b}]$ は F の算定に必要な成分で 1、それ以外で 0 として得られるベクトルである。

(2) 設計感度解析

$\psi \rightarrow \psi + \Delta \psi$ による目的関数 J の増分 ΔJ は次式で表される。

$$\Delta J = \int_0^T \Delta j dt = \int_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial j}{\partial p}, \Delta p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial j}{\partial \psi}, \Delta \psi \right\rangle \right\} dt \quad (7)$$

ここで、 $\langle, \rangle$ は Fréchet 微分を表す。式 (7) より、 ΔJ の評価には $\Delta \mathbf{u}$ 、 Δp の評価が必要となる。これらを直接導出することなく式 (7) を評価する目的で、随伴変数法を用いると次式を得る。

keywords : VOF 法, 非圧縮超弾性体, 形状最適化, 荷重-変位曲線
 連絡先 : 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地
 TEL 025 (262) 7028 FAX 025 (262) 7021

$$\Delta J = \int_{\Omega} \bar{\beta} \Delta \psi d\Omega \quad (8)$$

ここで,

$$\int_{\Omega} \beta \Delta \psi d\Omega = - \left\langle \frac{\partial a}{\partial \psi}, \Delta \psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial b}{\partial \psi}, \Delta \psi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial R}{\partial \psi}, \Delta \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial j}{\partial \psi}, \Delta \psi \right\rangle, \quad (9)$$

$$\bar{\beta} = \int_0^T \beta dt$$

(3) VOF 関数の移流速度

VOF 法では構造物の形状変化を VOF 関数 ψ の移流により記述する. ψ の移流速度を $\mathbf{v}$ とすると, 以下の移流方程式を得る.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi \quad (10)$$

最適化過程において目的関数 J が単調減少するように, 移流速度 $\mathbf{v}$ を次式で与える.

$$\mathbf{v} = \bar{\beta} \nabla \psi \quad (11)$$

また, 移流過程において生じる数値拡散の抑制を目的として CIVA 法を適用し, さらに物体境界をより明確にするために正接関数変換を併用する.

4. 解析例

以下の解析においては, 非圧縮超弾性体の材料定数は鉄道軌道用ゴムパッドを例に $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1(N/mm^2)$ とし, 線形弾性体のポアソン比 ν とせん断弾性係数 G をそれぞれ $\nu = 0$, $G = 2(c_1 + c_2) = 0.8(N/mm^2)$ と設定した. 本来物質の存在しない空孔域には物体域の $1/1000$ の剛性を与えた. さらに, 非圧縮超弾性体と線形弾性体の各方程式の重み係数 ω_1 , ω_2 は検討結果に基づき次のように設定した.

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 0 \quad (\psi < \frac{1}{2}) \\ &= 2(\psi - \frac{1}{2}) \quad (\psi \geq \frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\omega_2 = 1 - \omega_1$$

(1) 解析条件の設定

アスペクト比 4:1 の長方形領域を設計対象領域とする. 対称性を考慮し, 上半分の領域のみを考える. 図 1 に示すように下端鉛直変位を固定し, 上端に様な強制変位を与えて押し込む. 三角形要素を用いて図 1 の様に要素分割した. また, 最上段から 5 段目までの载荷部は VOF 関数 $\psi = 1$ として固定した. 変位増分は $\Delta u_y = 0.01(mm)$ とし, 最大で $0.20(mm)$ まで押し込んだ. また, 物体境界近傍における VOF 関数の中間密度領域の発生を抑制するために, 10step 毎に再初期化¹⁾を行う.

(2) 解析結果

各最適化過程における形状下での荷重-変位曲線を規定値(太線)と合わせ図 2 に示す. また, 最適化過程での形状を図 3 に示す. 12step 目で形状はほぼ収束しており, 規定荷重-変位曲線に概ね到達している. 目的関数 J の変化は図 4 のようであり, 速やかに収束していることがわかる. また, 最終形状における $0.2(mm)$ 押し込み時の変形の様子を図 5 に示す. 座屈に近い変形により剛性低下を実現していることが確認できる.

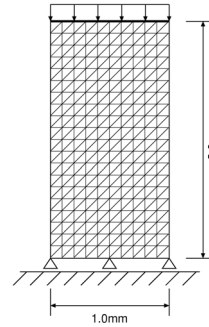


図 1 解析条件

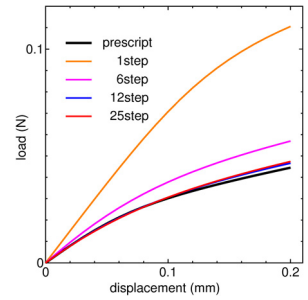


図 2 荷重-変位曲線

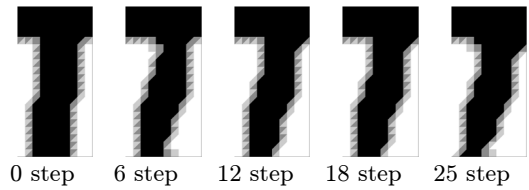


図 3 最適化過程における形状変化

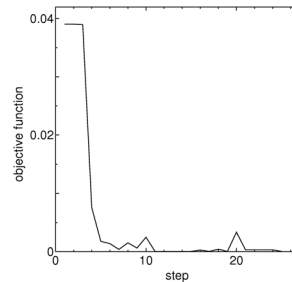


図 4 目的関数の推移

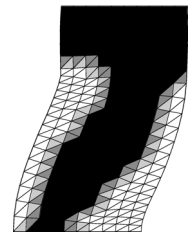


図 5 変形形状

5. おわりに

非圧縮超弾性体を対象に所定の荷重-変位曲線を与え得る形状の探索を試みた. その結果, 比較的少ないステップ数で適切な形状を見出すことができた. 今後はより現実的な条件設定の下, 最適形状の探索を進めていきたい.

参考文献

- 1) 阿部和久, 小板橋智哉, 紅露一寛: VOF 法を用いた非圧縮超弾性体のトポロジー最適化, 計算数理工学論文集, vol.7, No.2, 243-248, 2008.