

境界要素トポロジー最適化へのトポロジー導関数の適用

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 藤生 孝典
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

文献¹⁾では、level set 法を用いた境界要素法によるトポロジー最適化手法について検討がなされている。当該手法は、境界要素端点の座標を設計変数に用いるため、物体形状に何ら制約が課されないという特徴を持つ。しかし、最適化過程で空孔を生成することが不可能であり、初期形状に複数の空孔を設定する必要がある。そのため、最終形状が初期トポロジーに依存する恐れがあるといった問題を有している。また、初期空孔の数を増やすことでトポロジー変化の進展を促進できるが、それに伴う境界要素数の増加により、計算量が多大になるという問題点も挙げられる。以上のことから、初期設定によらず、合理的に空孔を生成する手段が望まれる。

本研究では、これらの問題点を解決するために、境界要素法に基づくトポロジー最適化手法に対して、トポロジー導関数の援用を試みる。

2. Level set 法を用いたトポロジー最適化

(1) 最適化問題

Level set 法を用いた境界要素トポロジー最適化法¹⁾では、境界要素方程式の設計感度解析と Level set 関数の移流計算によって、次の最適化問題の解を求めて行く。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}_b} J(\mathbf{W}; \mathbf{X}_b) &:= F(\mathbf{W}; \mathbf{X}_b) \\ &+ [\boldsymbol{\lambda}]^T \{\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{P}\} + \lambda_+(V - V_{max}), \\ \text{subject to} \\ [\boldsymbol{\lambda}]^T \{\mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{P}\} &= 0 \\ \lambda_+(V - V_{max}) &= 0, \quad \lambda_+ \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $[\mathbf{H}]$, $[\mathbf{G}]$ は境界要素方程式を離散化して得られる係数行列であり、 $\{\mathbf{U}\}$, $\{\mathbf{P}\}$ は変位と表面力の節点値ベクトル、 $\{\mathbf{W}\}$ は変位と表面力の節点ベクトルの未知成分である。 J は最終的な目的関数、 F はコスト関数、 $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ は境界要素方程式に関する Lagrange 乗数ベクトル、 λ_+ は体積 V の制約に関する Lagrange 乗数、 V_{max} は体積に課さ

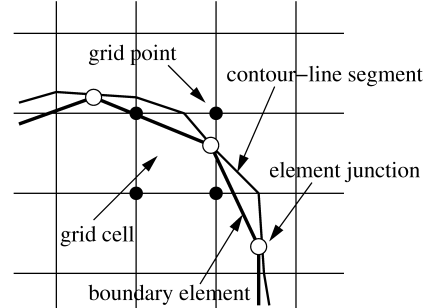


図 1 各格子点における Level set 関数値と境界要素分割

れる許容値である。また、 $\mathbf{X}_b$ は境界要素端点座標を並べたベクトルであり、当該問題における設計変数である。

(2) 設計感度解析

式 (1) より、設計感度を評価するために以下の随伴問題を設定する。

$$[\mathbf{A}]^T \{\boldsymbol{\lambda}\} = -\left\{ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $[\mathbf{A}]$ は境界要素求解方程式の係数行列である。上式を解いて $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ が求められれば、 J の変分 ΔJ は次式により境界要素端点の変化量 $\Delta \mathbf{X}_b$ のみで評価可能となる。

$$\Delta J = [\boldsymbol{\lambda}]^T [\mathbf{C}] + \lambda_+ \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}_b} \right]^T \{\Delta \mathbf{X}_b\} \quad (3)$$

ここで、 $[\mathbf{C}]$ は境界要素方程式の係数行列の物質微分より与えられるベクトルである。この式に基づき境界要素端点の移動速度 $\dot{\mathbf{X}}_b$ を求める。

(3) Level set 関数の移流計算

Level set 関数 ψ は物体領域で正、空洞域で負、物体の境界で 0 となるスカラー関数であり、設計領域内に固定した格子点上で設定する。このゼロ等高線で物体形状を表現することでトポロジー変化の捕捉が可能となる。Level set 関数は、次の移流方程式によって更新される。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は設計領域内の格子点上で与えられる Level set 関数の移流速度である。式 (4) の移流計算では、(a) 設計感度解析で得られた境界要素端点の移動速度から、(b) 線形補間により境界要素上の移動速度を与え、(c) ゼロ等高

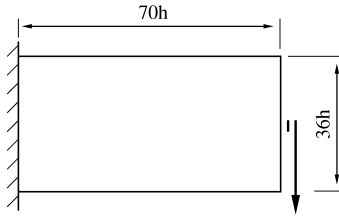


図2 解析条件

線分上の移動速度を区間一定関数で近似し、その射影により各格子点の移流速度を作成する。

Level set 関数は各 step 毎に更新され、その結果よりゼロ等高線を求めて新たな物体境界を得る。さらに、ゼロ等高線上で等間隔に境界要素端点を配置することで境界要素が更新される (図1)。

3. トポロジー導関数

トポロジー導関数を、微小孔が拡大したことによる目的関数の変化率として定義し²⁾、境界要素法に基づき定式化する。弾性体内に $\hat{\mathbf{x}}$ を中心とした半径 ρ の空孔を仮定すると、トポロジー導関数 D_T はコスト関数 F に対して次のように表すことができる。

$$D_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta \rho \rightarrow 0}} \frac{F(\mathbf{W} + \Delta \mathbf{W}; \rho + \Delta \rho) - F(\mathbf{W}; \rho)}{\Delta V_\rho} \quad (5)$$

ここで、 V_ρ は空孔の体積であり、 $\Delta V_\rho = 2\pi\rho\Delta\rho$ となる。

空孔存在下で目的関数 J は次のように与えられる。

$$J(\mathbf{W}; \rho) = F(\mathbf{W}; \rho) + [\lambda]^T \{ \mathbf{H}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{P} + \bar{\mathbf{P}} \} \quad (6)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{P}}$ は境界要素方程式における微小孔境界 Γ_ρ 上の積分項である。式(2)を援用すると、半径の増分 $\Delta\rho$ による目的関数 J の変化率から、トポロジー導関数は次式により評価できる。

$$D_T = [\lambda]^T \{ \dot{\bar{\mathbf{P}}} \}, \quad \{ \dot{\bar{\mathbf{P}}} \} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta \rho \rightarrow 0}} \frac{\{ \Delta \bar{\mathbf{P}} \}}{\Delta V_\rho} \quad (7)$$

静弾性問題の場合、 $\{ \dot{\bar{\mathbf{P}}} \}$ は次式により評価できる。

$$\{ \dot{\bar{\mathbf{P}}} \} = \frac{1}{\pi} \sigma_0^* \cdot \int_0^{2\pi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{U} d\theta \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は一様応力下の無限弾性体中に設けられた単位円孔境界上の変位、 $\mathbf{n}$ は外向き単位法線ベクトルであり、 σ_0^* は応力の基本解の微小孔中心での値である。

4. 解析例

(1) 解析条件

本手法をコンプライアンス最小化問題に適用する。コスト関数 F は次式で与えられる。

$$F = \int_{\bar{\Gamma}_p} \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (9)$$

ここで、 $\bar{\Gamma}_p$ は非ゼロ表面力の規定されている部分境界である。初期形状と境界条件を図2に示す。 h は背景格子の

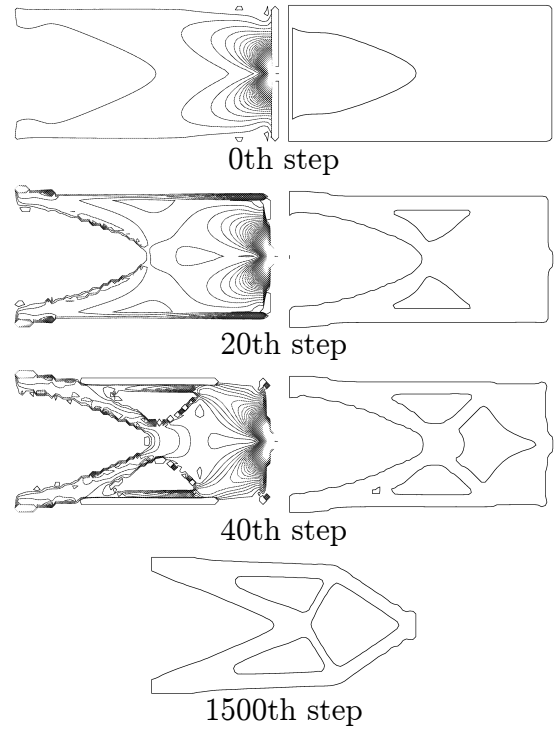


図3 トポロジー導関数の分布とトポロジー変化

サイズであり、分割境界要素長は h とする。なお、平面ひずみ問題の下でポアソン比は 0.3 とし、体積制約 V_{max} を初期体積の 0.4 とした。

(2) 結果の検討

比較的初期の段階における最適化過程と 1500step でのトポロジーを図3に示す。空孔導入は体積 V が許容体積 V_{max} に達するまで、20step 毎に行った。また、空孔の形状はトポロジー導関数平均値の 60 % に対応する等高線によって与えた。左側の図はトポロジー導関数の分布、右側の図は空孔導入直後の形状を示している。これらの結果から、形状の収束には比較的多くの step 数を要しているものの、40step において既に最終トポロジーが形成されていることが確認できる。

5. おわりに

本研究では、Level set 法を用いた境界要素トポロジー最適化手法に対して、トポロジーの形成を目的としてトポロジー導関数の援用を試みた。その際に、境界要素解析におけるトポロジー導関数を定式化し、空孔はその等高線に沿って導入するものとした。また、コンプライアンス最小化問題に対する適用を通し、その結果から本手法の妥当性を確認できた。

参考文献

- 1) Abe, K., Kazama, S. and Koro, K., A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method, *Comm. Num. Meth. Eng.*, **23**, 405-416, 2007.
- 2) Novotny, A.A., Feijóo, R.A., Taroco, E. and Padra, C., Topological sensitivity analysis, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 803-829, 2003.