

演算子積分時間領域高速多重極境界要素法の開発と 二次元弾性および粘弾性波動場の可視化

○福井大学大学院 正会員 斎藤隆泰
福井大学大学院 学生会員 石田貴之
福井大学大学院 正会員 福井卓雄
東京工業大学大学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

弾性波動場の正確なシミュレーションは地震波の予測をはじめ、土木工学における様々な場面で役に立つ。そのため、弾性波動場の可視化を行うことは土木工学に関する物理現象を理論的に解釈するために重要であろう。境界要素法は、弾性波動場の解析に有効な手法¹⁾として知られているが、時間増分が小さい時に解が不安定になること、また、大規模問題に対して計算時間・記憶容量が膨大になるといった欠点があり、実用的に改善の余地がある。本研究では、これらの欠点を改善した新しい時間領域境界要素法を提案し、大規模問題における弾性・粘弾性波動場を可視化を行う。

2. 時間領域境界要素法の改良点

はじめに、新しい時間領域境界要素法に関する改良点についてまとめておく。まず、時間増分が小さい時に解が不安定となることを改善するために、Lubichの演算子積分法²⁾を時間領域境界積分方程式に適用する。演算子積分法は、繰込み積を、ある重み表現を用いた離散化繰込み積で表す手法であり、繰込み積を精度良く、安定に計算できるという利点を持つ。一方、大規模問題に対する計算時間・記憶容量を低減するために、Rokhlinにより提案された高速多重極法³⁾を時間領域境界要素法の遅延ポテンシャルに対する行列ベクトル積の計算に適用する。高速多重極法を用いることにより、行列ベクトル積の計算を高速に、かつ係数行列を保存しないで済むことから、計算時間・記憶容量を大幅に削減することが可能である。

3. 粘弾性面内波動問題における演算子積分時間領域高速多重極境界要素法

今、領域 D 内における散乱体 $\bar{D}$ による粘弾性面内波動の散乱問題を考える。散乱体の境界を S とし、初期条件 $u_i|_{t=0} = 0, \partial u_i / \partial t|_{t=0} = 0$ を考慮すれば、変位成分 u_i 、対応する表面力成分 t_i 、時間 t に対し、支配方程式および境界条件は

$$\mu(t) * \dot{u}_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + \left(K(t) + \frac{1}{3}\mu(t) \right) * \dot{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } D \quad (1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_1, \quad t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \quad (2)$$

で与えられる。ここに、 $K(t), \mu(t)$ はそれぞれ体積弾性係数および、せん断弾性係数に対応する緩和関数、 ρ は密度、 $(\dot{})$ は時間微分を表す。また $\bar{u}_i, \bar{t}_i$ は変位および表面力に関する与えられた境界条件である。一般に粘弾性波動問題では、時間領域で閉じた基本解を求めることが出来ない。しかしながら、もし閉じた時間領域基本解 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ および二重層核 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ が求まるならば、この問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (3)$$

ここに、 C_{ij} は自由項であり、 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波を表す項である。さて、式(3)の繰込み積に演算子積分法を適用して離散化を行えば、以下の離散化された境界積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ & + \sum_{\alpha=1}^M [B_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)u_j^\alpha(n\Delta t) - A_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)t_j^\alpha(n\Delta t)] \\ & = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ & + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)u_j^\alpha(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、影響関数 A_{ij}^m, B_{ij}^m は

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\rho_L^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (5)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\rho_L^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (6)$$

となる。ここに、 $s_l = \delta(z_l)/\Delta t$ であり、 $\delta(z_l), \rho_L, L$ は演算子積分法により決定される²⁾。 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s), \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は粘弾性面内波動問題におけるラプラス変換域での基本解および二重層核である。式(4)より、第 n ステップにおける境界値はそれ以前の境界値により決定されることがわかる。したがって、 $n = 1$ からはじめて、順番に境界値を決定することができる。波動問題では式(4)の左辺の影響関数値から成

Key Words: 演算子積分法, 高速多重極法, 境界要素法, 粘弾性波動

〒 910-8507 福井県福井市文京 3-9-1

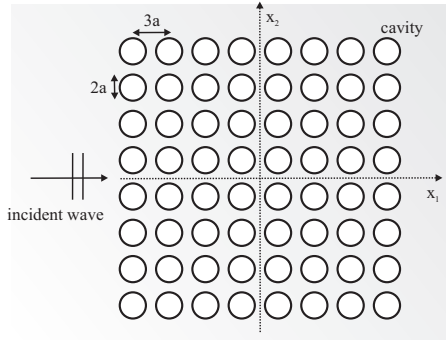


図1 8×8 空洞群による入射平面波の散乱問題

る行列は帯行列化することが可能であるから、以下では式(4)右辺の各ステップ毎の遅延ポテンシャルの計算を高速多重極法で効率的に計算することを考える。

4. 高速多重極法の適用

高速多重極法を適用するためには、基本解の多重極展開を求める必要がある。今、ラプラス変換域における基本解 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は次のように表せる。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{\mu^*(s)s_T^2} [\Phi_{,i}^U + e_{3ij}\Psi_{,j}^U] \quad (7)$$

ただし、 $\mu^*(s)$ はラプラス変換域での緩和関数、 Φ^U および Ψ^U はそれぞれ縦波、横波成分に関する変位ポテンシャルであり、

$$\Phi^U = \frac{1}{2\pi} K_0(s_L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)_{,k} \quad (8)$$

$$\Psi^U = e_{3kl} \frac{1}{2\pi} K_0(s_T|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)_{,l} \quad (9)$$

で表される。ここに K_n は n 次の第二種修正ベッセル関数である。ソース点 $\mathbf{y}$ の近傍に多重極点 $\mathbf{y}_0$ をとれば、式(8),(9)の多重極展開は

$$\Phi^U = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^U K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (10)$$

$$\Psi^U = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n^U K_n(s_T r) e^{in\theta} \quad (11)$$

で与えられる。ここで M_n^U, N_n^U はそれぞれ縦波、横波に関する多重極モーメントであり、 r, θ は多重極点 $\mathbf{y}_0$ から見た観測点 $\mathbf{x}$ の極座標成分である。式(10),(11)における多重極展開は、スカラー波動場における多重極展開と同じ形式で表されている。したがって、粘弾性面内波動問題における高速多重極法の構成も、基本的にはスカラー波動場における多重極展開の変換式を用いて計算することが可能である。

5. 数値解析例

図1に示すような多数の空洞群による粘弾性面内波動の散乱解析を行い、空洞群周辺の波動場を可視化した。空洞の半径を a とし、 x_1, x_2 方向に対する空洞の中心間隔は $3a$ とした。各空洞における要素数は64であり、全要素数は4096である。入射波は振幅 u_0 、波長 $2a$ の正弦波を粘弾

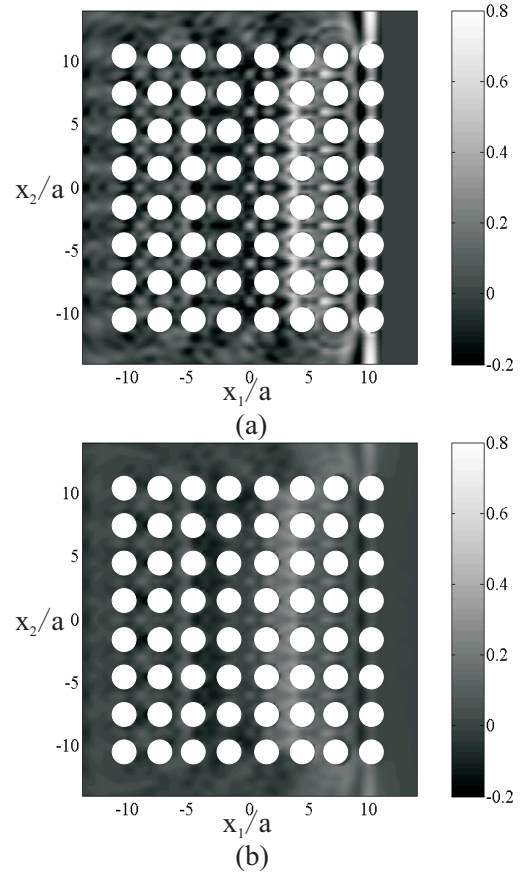


図2 空洞群周辺における $c_{L0}t/a = 22.5$ での u_1/u_0 波動場 (a) 弾性波動場の場合 (b) 粘弾性体波動場の場合

性体用に修正したものを用いた。また、粘性の強さに関するパラメータである緩和弾性係数 μ_R と初期弾性係数 μ_0 の比を $\mu_R/\mu_0 = 0.85$ 、初期弾性波速度を $c_{L0} = 2a/T_0$ 、応力緩和時間を $\tau_\sigma = T_0$ で与えている。 T_0 は弾性波速度 c_{L0} の波動が空洞を通過する時間とした。また、全ステップ数 $N = 256$ 、演算子積分法における計算パラメータを、 $L = 256$ 、 $\rho = 0.95609320$ ($\epsilon = 10^{-10}$) とし、時間増分は $c_{L0}\Delta t/a = 0.125$ 、入射波は時刻 $c_{L0}t/a = 0$ で図1の左一列の空洞群前面に到達するとした。図2-(a),(b)は時刻 $c_{L0}t/a = 22.5$ におけるそれぞれ空洞群周辺の弾性および粘弾性波動場における変位 u_1/u_0 を可視化したものである。図2より、空洞による散乱波を確認することができ、特に、粘弾性波動場の場合は粘性の効果により、入射波、散乱波ともに小さくなっていることを確認できる。

6. おわりに

二次元弾性および粘弾性波動場における、演算子積分時間領域高速多重極境界要素法の開発を行った。それぞれの波動場を可視化することにより、本手法の有効性を示した。今後は三次元問題への拡張を行う予定である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，(2000)。
- 2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129–145, (1988)。
- 3) Rokhlin, V. : Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60**, pp. 187–207, (1985)。