

鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析における時間域マルチスケール法の適用

新潟大学大学院 学生員 村松久志
 ㈱ホープ設計 嘉数東陽
 新潟大学 正会員 紅露一寛
 新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

現在, わが国の鉄道軌道で多用されているバラスト道床は, 列車の走行による繰り返し载荷よって変形し, 道床上面の沈下量(鉛直方向変位)の予測が軌道保守上重要となる. 著者らは不連続体モデル特有の計算負荷の大きさを避けるべく, バラスト部を等価な連続体でモデル化し, 構成則として hypoplastic モデル¹⁾を用いて繰り返し変形解析を試みてきた²⁾. しかし, 連続体モデルを用いた変形解析でも多数回の载荷の繰り返しを対象とする場合には計算量が膨大となり, 何らかの軽減策を講じる必要がある. そこで本研究では, hypoplastic モデルによるバラスト材繰り返し変形解析を対象に, 時間域マルチスケール法³⁾の適用を試みる.

2. Hypoplastic モデル

本研究では, バラスト道床の繰り返し変形挙動を hypoplastic モデルを用いて評価する. Hypoplastic モデル¹⁾の構成式は, 真応力 T_{ij} の客観速度 $\dot{T}_{ij}$ とストレッチング D_{ij} との関係が次式で定義される.

$$\begin{aligned}\dot{T}_{ij} &= f_s \left[L_{ij} + f_d N_{ij} \sqrt{D_{\gamma\delta} D_{\gamma\delta}} \right], \\ L_{ij} &= a_1^2 D_{ij} + \hat{T}_{ij} \hat{T}_{kl} D_{kl}, \quad N_{ij} = a_1 (\hat{T}_{ij} + \hat{T}_{ij}^*),\end{aligned}\quad (1)$$

なお, 本研究では微小変形を仮定し ε_{ij} を微小ひずみとして $\dot{T}_{ij} \approx \dot{T}_{ij}$, $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ で与える. また, $\hat{T}_{ij} = T_{ij}/T_{kk}$ とし, $\hat{T}_{ij}^*$ は $\hat{T}_{ij}$ の偏差成分であり, 材料関数 f_s , f_d , a_1 は文献¹⁾に示すものを与える.

なお, 間隙比 e の変化速度は次式で与える.

$$\dot{e} = (1+e)D_{kk} = (1+e)\dot{\varepsilon}_{kk}. \quad (2)$$

3. 構成式への時間域マルチスケール法の適用

本研究では, 式 (1), (2) の未知量である T_{ij} , ε_{ij} , e に対して時間に関する多重スケール性を仮定し, 漸近展開法を用いてマクロおよびミクロ時間スケールにおける構成方程式を導出する.

まず, ミクロ時間変数 τ とマクロ時間変数 t を定義し, 2 つのスケール間で $\tau = t/\zeta$ ($\zeta \ll 1$) なる関係を有するものとする. 今, 対象とする変数(応答) ϕ が時間に関する多重

スケール性を有するものとして, $\phi^\zeta(\mathbf{X}, t) := \phi(\mathbf{X}, t, \tau(t))$ ($\mathbf{X}$: 物質点の位置ベクトル) のように表わす. ここで, ϕ^ζ を $\zeta = 0$ のまわりで漸近展開すると, ϕ^ζ とその時間微分は次式で表わすことができる.

$$\begin{aligned}\phi^\zeta &= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^m \phi^{(m)}(\mathbf{X}, t, \tau), \\ \dot{\phi}^\zeta &:= \sum_{m=0,1,\dots} \zeta^{m-1} \dot{\phi}^{(m-1)}(\mathbf{X}, t, \tau), \\ \dot{\phi}^{(-1)} &:= \phi_{,\tau}^{(0)}, \quad \dot{\phi}^{(n-1)} := \phi_{,t}^{(n-1)} + \phi_{,\tau}^{(n)},\end{aligned}\quad (3)$$

なお, $n = 1, 2, \dots$ とする.

式 (1) の未知量が式 (3) のように記述できることに留意して, 応力速度・ひずみ速度(ストレッチング)関係式に時間域マルチスケール法を適用する. 式 (1) とその未知量を漸近展開し, ζ に関する主要項を評価する. $O(\zeta^{-1})$ の方程式は次式のようになる.

$$T_{ij,\tau}^{(0)} = f_s^{(0)} \left[L_{ij}^{(0)} + f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta,\tau}^{(0)}} \right]. \quad (4)$$

ここで,

$$\begin{aligned}T_{ij}^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) &= \bar{T}_{ij}(\mathbf{X}, t) + \tilde{T}_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau), \\ \varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) &= \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{X}, t, \tau), \\ e^{(0)}(\mathbf{X}, t, \tau) &= \bar{e}(\mathbf{X}, t) + \tilde{e}(\mathbf{X}, t, \tau),\end{aligned}\quad (5)$$

のように分解可能であるものとする, ミクロ時間スケールにおける構成式として次式を得る.

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{ij,\tau} &= f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \tilde{\varepsilon}_{ij,\tau} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \tilde{\varepsilon}_{kl,\tau} \right. \\ &\quad \left. + f_d^{(0)} a_1^{(0)} \left(\hat{T}_{ij}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)*} \right) \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau} \tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau}} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

一方, $O(\zeta^0)$ の構成式は, 漸近展開を適用し高次項を無視すると, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned}T_{ij,t}^{(0)} &= f_s^{(0)} \left[a_1^{(0)2} \varepsilon_{ij,t}^{(0)} + \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,t}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \frac{\varepsilon_{kl,t}^{(0)} \varepsilon_{kl,\tau}^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon_{\gamma\delta}^{(0)} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(0)}}} \right].\end{aligned}\quad (7)$$

式 (5) を (7) に代入した上で, τ_0 をミクロ時間スケールの代表長さとして τ について次式の時間平均をとり,

Key Words: 時間域マルチスケール法, バラスト道床, 道床沈下, hypoplastic モデル

〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7274 FAX (025) 262-7021

$$\langle \phi \rangle := \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \phi(\mathbf{X}, t, \tau) d\tau, \quad (8)$$

結果として得られた式において, $\langle (\tau - \tau_1) \tilde{\varepsilon}_{ij,t} \rangle = 0$ のように τ_1 を選び, $\tilde{\varepsilon}_{ij,t}$ を含む各項を平均値の定理を用いて近似すると, マクロ時間スケールにおける構成式として次式を得る.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij,t} + \langle \tilde{T}_{ij} \rangle_t &= \langle C_{ijkl} \rangle \bar{\varepsilon}_{kl,t} + C_{ijkl}(\tau_1) \langle \tilde{\varepsilon}_{kl} \rangle_t, \\ C_{ijkl} &:= \frac{1}{2} f_s^{(0)} a_1^{(0)2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\quad + f_s^{(0)} \hat{T}_{ij}^{(0)} \hat{T}_{kl}^{(0)} + f_s^{(0)} f_d^{(0)} N_{ij}^{(0)} \frac{\tilde{\varepsilon}_{kl,\tau}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau} \tilde{\varepsilon}_{\gamma\delta,\tau}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

なお, 上式における材料関数の漸近展開主要項の詳細は, 文献⁴⁾で確認されたい.

一方, 間隙比の発展則についても同様に, 漸近展開を用いて時間に関するマルチスケール分解を行なう. 式(2)の諸量にマルチスケール性を仮定し, 式(3)を適用した上で漸近展開の高次項を無視すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} O(\zeta^{-1}): \quad e_{,\tau}^{(0)} &= \left[1 + e^{(0)} \right] \varepsilon_{kk,\tau}^{(0)}, \\ O(\zeta^0): \quad e_{,t}^{(0)} &= \left[1 + e^{(0)} \right] \varepsilon_{kk,t}^{(0)}. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, 式(5)を式(10)に代入し, 第2式に式(8)と平均値の定理を適用すると, ミクロ・マクロ双方の時間スケールにおける発展則を規定する式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{,\tau} &= [1 + \bar{e} + \tilde{e}] \tilde{\varepsilon}_{kk,\tau}, \quad (\text{micro}) \\ \bar{e}_{,t} + \langle \tilde{e} \rangle_t &= [1 + \bar{e} + \langle \tilde{e} \rangle] \bar{\varepsilon}_{kk,t} \\ &\quad + [1 + \bar{e} + \tilde{e}(\tau_2)] \langle \tilde{\varepsilon}_{kk} \rangle_t. \quad (\text{macro}) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, τ_2 は $\langle (\tau - \tau_2) \tilde{\varepsilon}_{kk,t} \rangle = 0$ となるように定義する.

4. 解析手法の妥当性の検討

本論文で示した定式化と解析アルゴリズムの妥当性を検討する目的で, バラスト材の大型繰り返し三軸試験⁵⁾のシミュレーションに本手法を適用した. 試験では直径 30cm, 高さ 60cm の円柱供試体を使用し, 供試体を 19.6kPa まで等方圧縮した後, 軸荷重が $T_{11} = -98\text{kPa}$ に達するまで載荷し, その後等方応力状態まで除荷している. 拘束圧は $T_{22} = T_{33} = -19.6\text{kPa}$ で一定としている. 材料定数については, 文献²⁾に示した値を採用している.

解析においては, 式(6), (11) 第1式によるミクロ解析と, 式(9), (11) 第2式によるマクロ解析とを交互に行なう弱連成解析手法³⁾を採用する. 本手法によれば, 載荷・除荷 1 サイクル終了時の残留ひずみと間隙比は, マクロ時間応答 $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{e}$ に一致する. なお, マクロ時間応答の解析においては, ミクロ時間応答の時間平均の t に関する時間変化率の評価が必要となる. この評価方法として, 各マクロ時間ステップで解くミクロ問題の載荷・除荷を 1 サイクル分考え, 各マクロ時間ステップで評価されたミクロ応答の

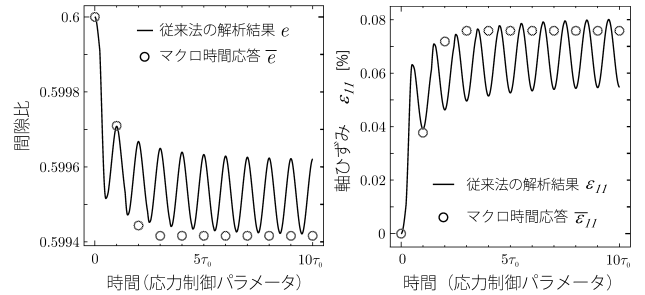


図-1 繰り返し 10 回目までのマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ の評価精度 (スキーム 1).

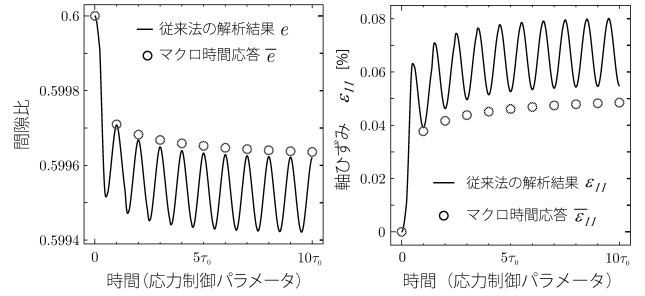


図-2 繰り返し 10 回目までのマクロ時間応答 $\bar{e}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$ の評価精度 (スキーム 2).

時間平均の差分近似により, 当該の値を計算する手法 (スキーム 1) と, ミクロ時間応答の解析を載荷・除荷 2 サイクル分を行ない, その 1 サイクルごとにミクロ応答の時間平均を求め, その差分近似で与える方法 (スキーム 2) の 2 種類を考えた.

繰り返し回数 10 回目までの残留軸ひずみと間隙比の計算結果を図-1, 図-2 に示す. スキーム 1 を採用した場合, 繰り返し 2 回目において間隙比のマクロ時間における変化量 $\Delta \bar{e}$ と軸ひずみ増分 $\Delta \bar{\varepsilon}_{11}$ が過大評価されている. 一方, スキーム 2 はミクロ時間解析の計算負荷がスキーム 1 の 2 倍となるものの, 時間平均の時間変化率を t 軸上の前進差分で評価するために評価精度がスキーム 1 より高く, 解析精度の改善効果が認められる. 今後は, 解析精度の向上とあわせて, つり合い問題に対する解析アルゴリズムを構成し, 計算効率の改善効果等について検討したい.

参考文献

- 1) Bauer, E.: Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils & Foundations*, Vol.36, No.1, pp.13-26, 1996.
- 2) 紅露一寛, 嘉数東陽, 梶原宗光, 阿部和久: 鉄道におけるバラスト道床材の繰り返し変形解析に用いる構成モデルの検討. 計算数理工学論文集, Vol.7, No.1, pp.31-36, 2007.
- 3) Oskay, C., Fish, J.: Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.61, pp.329-359, 2004.
- 4) 紅露一寛, 嘉数東陽, 村松久志, 阿部和久: 繰り返し荷重を受ける鉄道用バラスト材の変形解析への時間域マルチスケール法の適用, 計算工学講演会論文集, Vol.13, 2008.
- 5) 石川達也, 須長 誠, 董 軍, 名村 明: 大型繰り返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会論文集, No.575, III-40, pp.169-178, 1997.