三角形メッシュを用いた有限被覆法による大変形固体解析

中央大学大学院 学生員 寺沢 英之
中央大学 正会員 樫山 和男
広島大学大学院 正会員 岡澤 重信
東北大学大学院 正会員 寺田 賢二郎
東北大学大学院 正会員 車谷 麻緒

1. はじめに

大変形を伴う塑性加工や衝撃問題の解析において，固定メッシュにより変形を記述する Eulerian 解法は，大変形時のメッシュの歪みを回避し，計算精度の低下や計算の破綻を回避する手法として近年注目されている．著者らは，既往の研究において，四角形要素および三角形要素を用いた Eulerian 有限要素法の構築を行い，その有効性を示してきた．[1) 2)] しかし，Eulerian 解法では固体境界面を間接的に表現していたために，要素間を移動する固体境界面を精度良く制御することは困難であった．

そこで，本研究では上記の問題点を解決する手法として，有限被覆法 (Finite Cover Method)[3)] の適用を検討する．有限被覆法は，近似関数を構成する数学領域と支配方程式を満たす物理領域を独立に定義することができるため，固定メッシュにおいて固体境界を精度良く制御することが可能になる手法である．なお，有限要素としては任意形状の適用性に優れた三角形一次要素に基づく非構造格子を用いる．本手法の妥当性と有効性を検討するため，数値解析例として延性引張解析を取り上げた．

2. 数値解析手法

(1) operator split 法

Eulerian 解法における支配方程式は，次式のように表される．

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{f} \tag{1}$$

ここで，ρ は密度，$\mathbf{v}$ は固体の変形速度，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル，$\mathbf{f}$ は物体力を表している．式 (1) に対して，operator split 法を用いて次式のように 2 つに分割する．

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{f} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t}=0 \tag{3}$$

式 (2) は，外力項を含んだ非移流ステップ, 式 (3) は，移流項を含んだ移流ステップにおける方程式である．このとき式 (2) における $*$ 印は非移流ステップ後の諸量を意味し，式 (3) において非移流ステップ後の解を固定された計算要素に投影させる．

(2) 非移流ステップ

非移流ステップにおいては，中央差分法により，次式のように各節点の速度増分 $\Delta\mathbf{v}$ を求めることが出来る．

$$\Delta\mathbf{v}=\Delta t\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext}-\mathbf{F}_{int}) \tag{4}$$

ここで Δ は時間増分であり，$\mathbf{F}_{ext}$ と $\mathbf{F}_{int}$ はそれぞれ外力および内力ベクトルである．そして $\mathbf{M}$ は質量マトリックスであり，集中質量マトリックスを用いることにより式 (4) においては連立方程式の解法が不要となる．式 (4) から得られる速度増分を用いて速度を更新することによって，各時間ステップでの速度が求まり非移流計算が可能となる．非移流計算の詳細については文献[1) 2)] などを参照されたい．

(3) 移流 ステップ

本研究では，自由境界面を表現するために，VOF 法を適用する．また，移流方程式の解法には高精度移流スキームとして知られる CIVA 法[4)] を適用する．CIVA 法は移流方程式の厳密解 (式 (5)) から，時刻 $t-\Delta t$ において上流点に位置するの $\mathbf{x}-\mathbf{u}\Delta t$ の値 $\phi^n(\mathbf{x}-\mathbf{u}\Delta t, t-\Delta t)$ を，上流点を含む要素間で補間することによって $\phi^{n+1}(\mathbf{x},t)$ を求める手法である．

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x},t)=\phi^n(\mathbf{x}-\mathbf{u}\Delta t, t-\Delta t) \tag{5}$$

(4) 有限被覆法 (Finite Cover Method) の適用

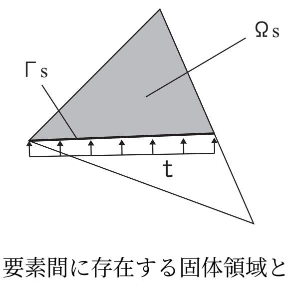
有限被覆法を適用させることにより，要素間に存在する固体領域の位置を考慮し，質量行列・内力ベクトル・外力を評価することが可能になる．以下にその式を示す．

$$\boldsymbol{M}=\rho\times\int_{\Omega_s}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{N}d\Omega \tag{6}$$

$$\boldsymbol{F}_{int}=\int_{\Omega_s}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega \tag{7}$$

$$\boldsymbol{F}_{ext}=\int_{\Gamma_s}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{t}d\Gamma \tag{8}$$

ここで，ρ は密度，$\boldsymbol{\sigma}$ は応力，$\boldsymbol{t}$ は外力を表している．また，Ω_s，Γ_s は図-1 に示す固体領域，固体の境界領域である．上式の定式化により，それぞれの節点での値は重み付けされたものになり，より精度の高い解析が期待できる．



図－1 要素間に存在する固体領域と固体境界

KeyWords： 有限被覆法，Eulerian 解法，非構造格子
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: terasawa@civil.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

数値解析例として，金属材料の引張延性解析を行った．全体の金属材料モデルは図-2 のようであり，形状および変形の対称性を考慮して 1/4 領域のみで解析を行った．材料定数については，ヤング率 200GPa，ポアソン比 1/3 を用いた．そして，塑性域では，文献[5] と同様な硬化型の応力－ひずみ関係を仮定した．

図-3-5 に，それぞれ Lagrangian 解法，Eulerian 有限要素法，本手法での変形結果と相当塑性ひずみの結果を示す．これらの結果より，Eulerian 有限要素法，有限被覆法での解析結果は，四角形 Lagrangian 解法に比べ，棒下端部のくびれが大きくなっていることが分かる．相当塑性ひずみにおいて，本手法は，Eulrian 有限要素法に比べ，Lagrangian 有限要素法に近い分布になったことが確認された．しかしながら，最大値は大きい値となった．これらを今後の課題としたい．また，現在金属材料の変形と共に，メッシュも変形をさせている，今後は，有限被覆法を用いて，固体境界面を精度良く制御することによって，固体メッシュでの引張解析を行い検討していきたい．

4. おわりに

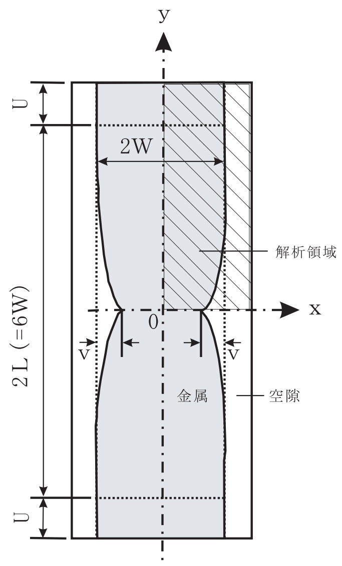
本研究では，固体の大変形解析のための高精度な数値解析手法の構築を目的として，有限被覆法を用いる手法を提案した．本手法の妥当性を検討するため，Lagrangian 有限要素法による結果との比較を行い以下の結論を得た．

- 有限被覆法を用いた本手法の計算結果は，Euelrian 有限要素法と同様に Lagrangian 有限要素法による結果と比べ，棒下端部のくびれが大きい結果となった．
- 相当塑性ひずみの分布の比較においては，本手法は Eulerian 有限要素法に比べ，Lagrangian 解法に近い分布となったものの，ひずみの最大値は大きい値となった．上記の問題点を今後の課題としたい．

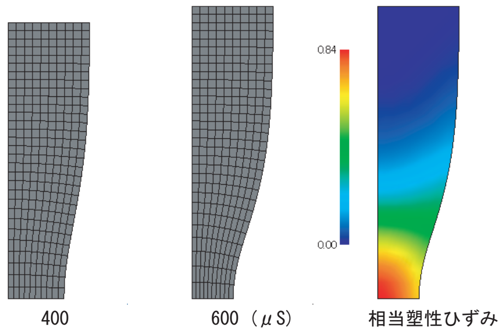
講演時では，有限被覆法により固定メッシュ上の固体境界に幾何学的条件を課した結果を示す．

参考文献

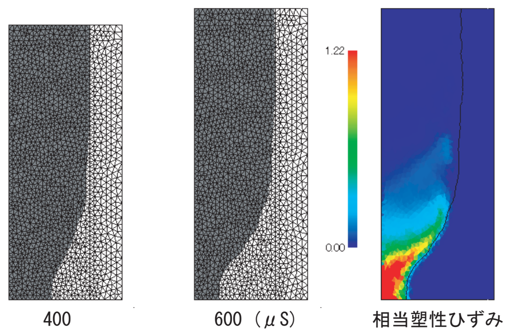
1) S.Okazawa, K.Kashiyama, Y.Kaneko：Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007；72：1544-1559
2) 寺沢英之，山田豊，樫山和男，岡澤重信：三角形非構造格子による Eulerian 大変形固体解析，土木学会年次学術講演会概要集 (CD-ROM)，62，2007.
3) 車谷麻緒，寺田賢二郎：有限被覆法における一般化要素の近似性能に関する基礎的研究，日本計算工学会論文集，論文番号 20030027，2003.
4) 田中伸厚：数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発，日本機械学会論文集（B編)，64 巻 620 号，1998.
5) 川井謙一：軸対称および平面ひずみ引張に関するベンチマークテスト，塑性と加工，32，pp553-559，1991.



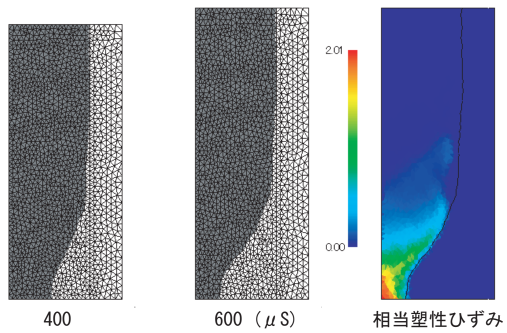
図－２　数値解析モデル



図－３　Lagrangian 解法による変形



図－４　Eulerian 有限要素法による変形



図－５　本手法による変形