非対称積層円筒シェルのエネルギー分析と座屈性状に関する研究

豊橋技術科学大学　学生会員　○柳田　将之
同　正会員　山田　聖志
同　松本健太郎
ロンドン大学 UCL 校　James.G.A.Croll

1．はじめに

近年，シェル構造の研究では繊維補強ポリマー(FRP：Fiber Reinforced Polymer)等の新素材を用い，高強度化・軽量化・長寿命化が進められている．FRP は比較的高価であるため，最適な設計が求められている．一方，シェル構造の中で軸圧円筒シェルの座屈問題が基本的かつ力学的に難しいとされ，初期不整に特に敏感であることが知られる．よって初期不整を考慮した最適な設計が必要となるため，本研究では初期不整を考慮した座屈耐力の下限を与える RS（低減剛性）法 [1]について検討した．等方性円筒シェルの研究は過去に多くなされており,近年では対称積層円筒シェルの研究も行われている [2]．本研究では, 非対称積層円筒シェルのエネルギー分析を行い, RS 法の適用手法について検討し, 座屈下限値の変化特性を明らかにした．

2．線形座屈解析法

図 1 に一様な軸圧 σ を受ける長さ L，曲率半径 R，シェル厚 t の円筒シェルモデルを示す．円筒座標系に対応する中立面の変位を u,v,w とする．境界条件は, 式(1)に示すものとした．変位関数は, 式(1)を満たす式(2)とした．i は周方向波数，j は軸方向半波数，u_{ij},v_{ij},w_{ij} は未定係数である．

本研究では，円筒シェルの厚さ t が曲率半径 R に比して十分小さいものとして扱い，DMV 型の歪－変位関係式を採用した．

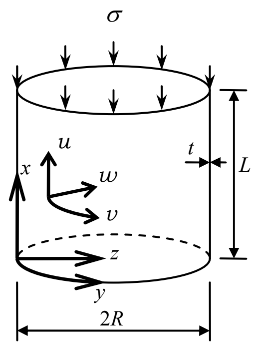


図 1．円筒シェルモデル

$$w=0\ ,\ \partial^2 w/\partial x^2=0\ ,\ \partial u/\partial x=0\ ,\ v=0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u&=u_{ij}\cos(iy/R)\cos(j\pi x/L)\\ v&=v_{ij}\sin(iy/R)\sin(j\pi x/L)\\ w&=w_{ij}\sin(iy/R)\sin(j\pi x/L)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

積層板の構成則は古典積層理論に基づく式(3)とした．

$$\begin{Bmatrix} n_x\\ n_y\\ n_{xy}\\ m_x\\ m_y\\ m_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26}\\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66}\\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ 2\varepsilon_{xy}\\ \kappa_x\\ \kappa_y\\ 2\kappa_{xy}\end{Bmatrix} \tag{3}$$

ただし, n_{ij} は面内合応力,m_{ij} は合応力としての曲げモーメント,ε_{ij} は面内歪，κ_{ij} は曲げ歪である．A_{ij} は面内剛性，B_{ij} は曲げと面内の連成剛性，D_{ij} は曲げ剛性である．

座屈前平衡状態の面内応力は，式(4)で与えられる．

$$n_x^E=-\sigma t\ \ ,\ \ n_y^E=0\ \ ,\ \ n_{xy}^E=0 \tag{4}$$

線形座屈解析解σ_cは, (5)式の座屈方程式を解くことで得る．

$$\delta\Pi_2=\delta\left\{U_{2mm}+U_{2bb}+2U_{2bm}+\sigma_c\left(\frac{\partial\left(V_{2m}^x+V_{2m}^y\right)}{\partial\sigma}\right)\right\}=0 \tag{5}$$

$$U_{2bb}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L\left(m_{xb}^d\kappa_x^d+m_{yb}^d\kappa_y^d+2m_{xyb}^d\kappa_{xy}^d\right)dxdy \tag{6}$$

$$U_{2mm}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L\left(n_{xm}^d\varepsilon_x^d+n_{ym}^d\varepsilon_y^d+2n_{xym}^d\varepsilon_{xy}^d\right)dxdy \tag{7}$$

$$U_{2bm}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L\left(m_{xm}^d\varepsilon_x^d+m_{ym}^d\varepsilon_y^d+2m_{xym}^d\varepsilon_{xy}^d\right)dxdy \tag{8}$$

$$V_{2m}^x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L\left(n_x^E\varepsilon_x^{dd}+n_x^{dd}\varepsilon_x^E\right)dxdy \tag{9}$$

$$V_{2m}^y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L\left(n_y^E\varepsilon_y^{dd}+n_y^{dd}\varepsilon_y^E\right)dxdy \tag{10}$$

ここに，U_{2bb} は曲げ歪エネルギ，U_{2mm} は面内歪エネルギ，U_{2bm} は曲げと面内の連成エネルギ，V_{2m}^x と V_{2m}^y は軸方向・周方向の非線形面内歪エネルギである．

式(2)で i=0 とすれば，軸対称座屈値 σ_s を式(11)として得る．

$$\sigma_s=\frac{2}{Rt}\left[\frac{1}{A_{11}}\sqrt{\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)\left(A_{11}D_{11}-B_{11}^2\right)}+B_{11}\frac{A_{12}}{A_{11}}-B_{12}\right] \tag{11}$$

3．解析モデル

本研究では，長径比 L/R=0.512，径厚比 R/t=405 の直交異方性積層円筒シェルを対象とした．積層材料としての材料定数算定には，複合則(式(12))を用いた．

$$\begin{aligned} &E_{11}=V_FE_F+V_PE_P && E_{22}=E_FE_P/\left(V_FE_P+V_PE_F\right)\\ &\mu_{12}=V_F\mu_F+V_P\mu_P && \mu_{21}=\left(E_{22}/E_{11}\right)\mu_{12}\\ &G_{12}=G_FG_P/\left(V_FG_P+V_PG_F\right) \end{aligned} \tag{12}$$

繊維(F)と樹脂(P)の縦弾性係数 E とポアソン比μ，体積含有率 V であり，E_F=72GPa，μ_F=0.22，E_P=3.5GPa，μ_P=0.34 を用いた．積層板としての座標系は x,y 軸で，x 軸に部材軸をとった．ラミナの座標系は 1,2 軸で，1 軸に繊維方向をとり，繊維配向角は x 軸と 1 軸がなす角度をθとした(図 2)．ラミナ座標系における構成則は，式(13)で与えられる．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E_{11}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\begin{bmatrix}1 & \mu_{12} & 0\\ \mu_{12} & \mu_{12}/\mu_{21} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}\left(1-\mu_{12}\mu_{21}\right)/E_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{13}$$

積層板 1 枚の構成則は，式(13)を座標変換し，式(14)で表す．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{14}$$

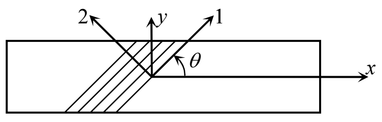


図 2．ラミナと積層板の座標系

KeyWord：非対称積層円筒シェル，RS(Reduced Stiffness)法，FRP，繊維配向角，複合則

連絡先：愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1　豊橋技術科学大学 Tel.0432-44-6849

図 3 に示されるように本研究では 6 層(ラミナの厚さ)からなる積層構成とした．式(3)の剛性成分は,式(15)で与えられる．

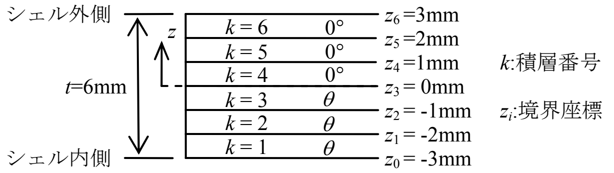


図 3．非対称積層[θ,θ,θ, 0°,0°,0°]の積層例

$$\left[A_{ij}\right]=\sum_{k=1}^{6}\left(Q_{ij}\right)_k\left(z_k-z_{k-1}\right)\ ,\ \left[B_{ij}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}\left(Q_{ij}\right)_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)$$
$$\left[D_{ij}\right]=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{6}\left(Q_{ij}\right)_k\left(z_k^3-z_{k-1}^3\right)\ ,\qquad (i,j=1,2,6) \tag{15}$$

4．エネルギー分析とRS座屈解析法

図 3 で θ=45°とした非対称積層[45°,45°,45°,0°,0°,0°]の線形座屈耐力スペクトルを図4に示す．RS座屈解析値は●で示す．i=18.6，j=2 が線形座屈解析最小値 σ_{cm} を与える．それぞれの軸方向半波数 j に対する RS 座屈解析値のうち最小値を σ^*_{cm} とする．図 4 の場合 j=1 波が σ^*_{cm} を与える．既往の研究 [3]で U_{2mm} と V^y_{2m} は，軸方向振幅 $\overline{w}_{i,j}+\overline{w}^0_{i,j}$ に対し早期に減少し，座屈点では小さくなることが示されている． σ_{cm} に対応する U_{2mb} や U_{2bm} は負であり，これらは U_{2mm} を更に早期に減じるための成分とみなし，本研究での RS 座屈解析は，式(16)とした．

$$\delta\left\{U_{2b}-\left(U_{2mm}+U_{2mb}+U_{2bm}\right)+\sigma^*_c\frac{\partial\left(V_{2m}-V^y_{2m}\right)}{\partial\sigma}\right\}=0 \tag{16}$$

5．積層構成による座屈耐力と座屈モード

繊維配向角 θ と座屈解析値 σ_{cm} , σ^*_{cm} , σ_s ,RS 軸対称座屈値 σ^*_s の関係(図 6)から, θ - σ 関係は以下の 4 パターンに分類できた．

1)図 6(a),(d),(g)のように，線形座屈解析では θ=45°前後では解析値は大きい．任意の θ に対する RS 解析値と線形座屈解析値の比を初期不整による座屈耐力の低下量として座屈低減係数をγと定義すれば，γはほぼ 0.35～0.56 の間にある．

2)図 6(c),(f)のように，両座屈解析結果ともに他の積層構成に比して軸対称座屈モードをとる領域が広い．θ=20°,70°では線形座屈解析値は高い値を示している．(c)では，γは θ=30°～70°で 0.2 以下で非常に小さく，初期不整の影響は特に大きい．(f)では，γは0.32～0.62の間にある．

3)図 6(b),(e),(h)のように，軸対称座屈値 σ_s が最小となる領域はない．線形座屈解析値は θ=45°前後で最大となる．γは 0.31～0.65 の範囲にあり， θ=45°でγは最小となり，そこでの初期不整の影響は最も大きくなると予想できる．

4)図 6(i)のように，θ の変化に対して両座屈解析値に大きな差はなく，γは 0.42～0.53 のほぼ一定である．

6．まとめ

本研究では，対称・非対称積層の FRP 円筒シェルの軸圧を受ける場合を対象に，弾性座屈耐力の基本特性を明らかにした．特に，同じ補強繊維量であっても，繊維配向角を制御・調整することで，線形座屈値並びに初期不整による低下を潜在的に考慮できる RS 座屈解析値は，大きく増減すること，従来の機械分野で研究された座屈最適配向角の決定法は危険側評価を与える場合もあることが示唆できた．

参考文献

1) 山田聖志:日本建築学会構造系論文集,No.390,pp.88-97,1988
2) S. Yamada,et al: *Journal of Applied Mechanics*, V0l.75, 2008
3) S. Yamada and J.G.A.Croll:*Journal of Applied Mechanics*, Vol.66,pp.299-309, 1999
4) K.Matsumoto,S.Yamada,H.T.Wang and J.G.A.Croll:*Proc. of APFIS*,IIFC,Vol.1,pp.465-470,2007

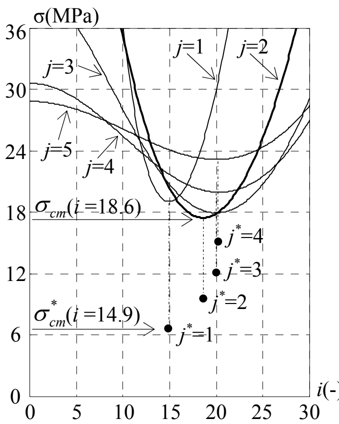


図 4.座屈耐力スペクトル
非対称積層[45°,45°,45°,0°,0°,0°]

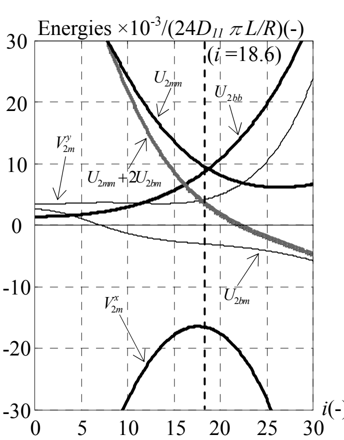
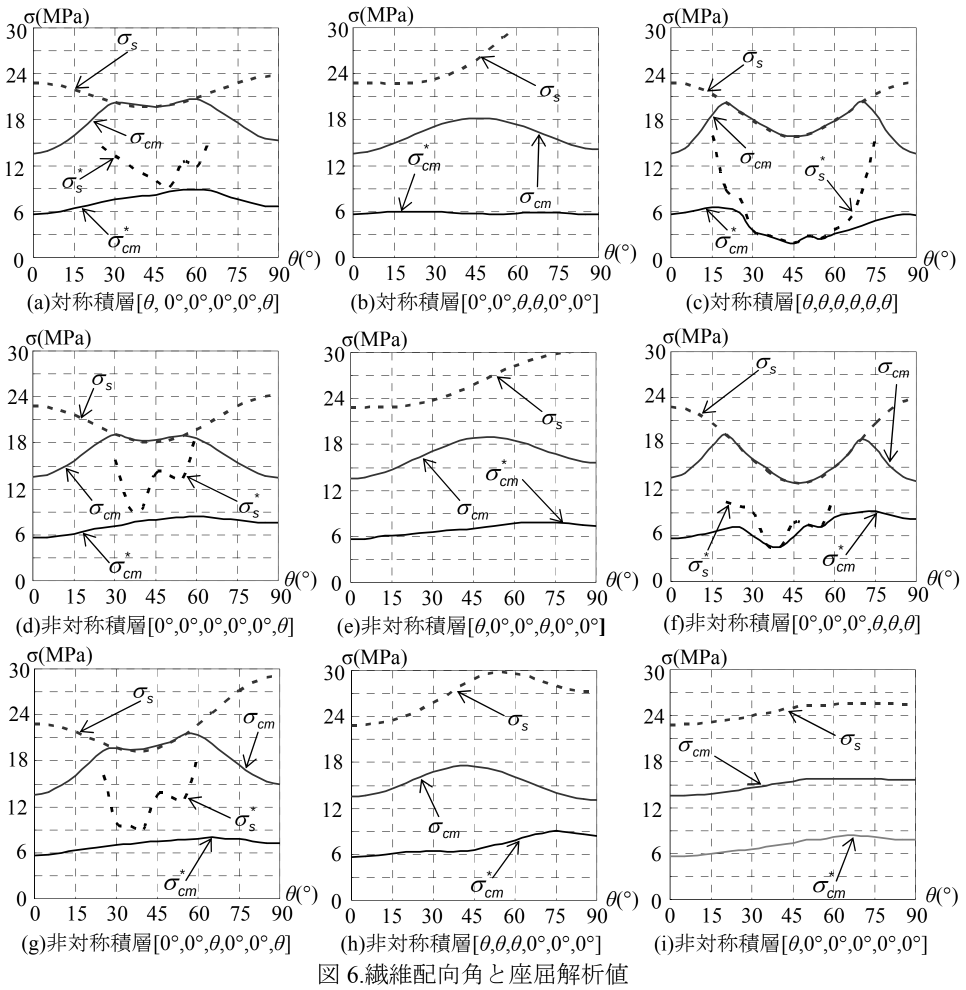


図 5.エネルギースペクトル(j=2)
非対称積層[45°,45°,45°,0°,0°,0°]


(a)対称積層[θ, 0°,0°,0°,0°,θ]
(b)対称積層[0°,0°,θ,θ,0°,0°]
(c)対称積層[$\theta,\theta,\theta,\theta,\theta,\theta$]
(d)非対称積層[0°,0°,0°,0°,0°,θ]
(e)非対称積層[θ,0°,0°,θ,0°,0°]
(f)非対称積層[0°,0°,0°,θ,θ,θ]
(g)非対称積層[0°,0°,θ,0°,0°,θ]
(h)非対称積層[θ,θ,θ,0°,0°,0°]
(i)非対称積層[θ,0°,0°,0°,0°,0°]
図 6.繊維配向角と座屈解析値