

ケルビンモデルと複素剛性モデルの動的挙動の比較

東京電機大学 学生会員 ○曾根 昭仁
 東京電機大学 正会員 小澤 良明
 東京電機大学 フェロー会員 松井 邦人

1. 目的

アスファルト混合物層の粘弾性挙動を示す基本的力学モデルとして、ケルビンモデルや複素剛性モデルが用いられる。両モデルを比較した研究は少なく、粘弾性挙動を良く示す力学的モデルの提示が望まれている。本研究では、両シミュレーションモデルを作成し応答解析を実施した。1自由度質点系を用いて両モデルの挙動の類似性・相違性を明らかにし、実舗装を意識した半無限体層でシミュレーションを実施する。

2. 1 質点系の振動

図-1 は質量 m の物体をモデル化したものである。物体の力学特性がケルビンモデルと複素剛性モデルで表している。この物体に $e^{i\omega t}$ の外力が作用するとき、支配方程式を次式のように書くことができる。

・ケルビンモデル

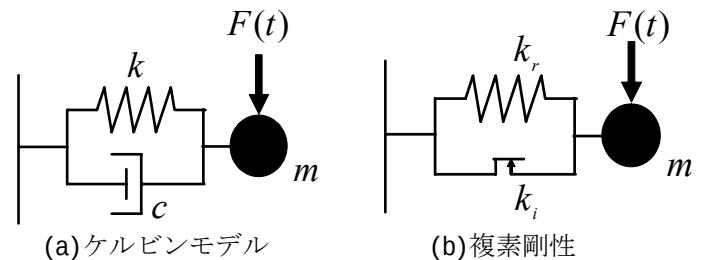


図-1 振動モデル

$$m\ddot{z}_k + c\dot{z}_k + kz_k = f(t) \quad (1)$$

ここで、 c は減衰係数、 k はばね定数

・複素剛性

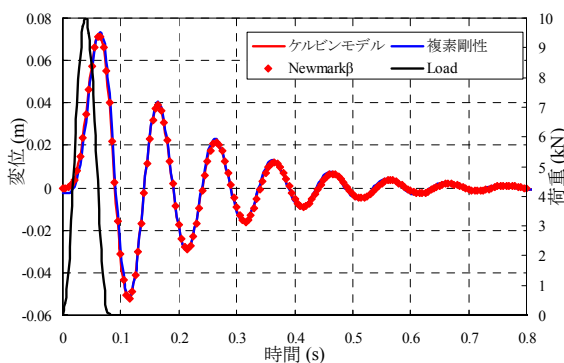
$$m\ddot{z}_c + (k_r + ik_i)z_c = f(t) \quad (2)$$

ここで、 k_r は複素剛性の実部、 k_i は複素剛性の虚部である。

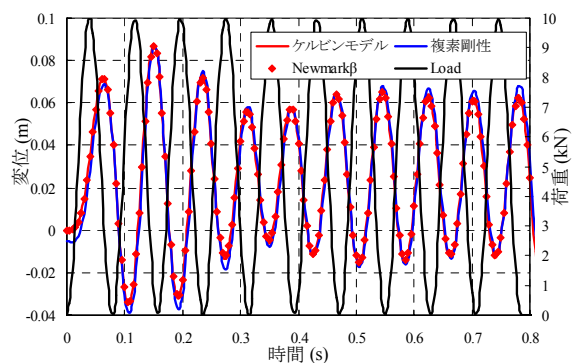
$f(t) = e^{i\omega t}$ のとき、式(1),(2)の定常解はそれぞれ次式のようなになる

$$z_k = \frac{e^{i\omega t}}{-m\omega^2 + i\omega c + k}, z_c = \frac{e^{i\omega t}}{-m\omega^2 + k_r + ik_i} \quad (3)$$

FFT で時間項を離散化し、定常解を求めた。なお、ケルビンモデルと複素剛性の粘性項は、 $k = k_r$ 、 $k_i = \omega c$ の関係を持つ。本論で扱う例題の粘性値は、両モデルとも等値となるように設定した。例題として、物性値 $m = 50\text{kg}$ 、 $k = k_r = 200\text{kN}$ 、 $c = 600\text{N}\cdot\text{s/m}$ 、 $k_i = 36\text{kN/m}$ のシミュレーションモデルに、外力 $f(t) = 10\sin^2 40t\text{ kN}$ を作用させて応答を求める。図-2(a)には外力 1 波、図-2(b)は外力 10 波を作用させた時の応答を記す。なお解析結果の検証のため、両図には、ケルビンモデルを Newmark β 法 ($\beta = 1/6$) で解析した応答も図示した。ケ



(a) 外力($f(t) = 10\sin^2 40t\text{ kN}$)1 波



(b) 外力($f(t) = 10\sin^2 40t\text{ kN}$)10 波

図-2 1 質点系解析

キーワード ケルビンモデル, 複素剛性, FFT

連絡先 〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学 TEL 0492-96-5731

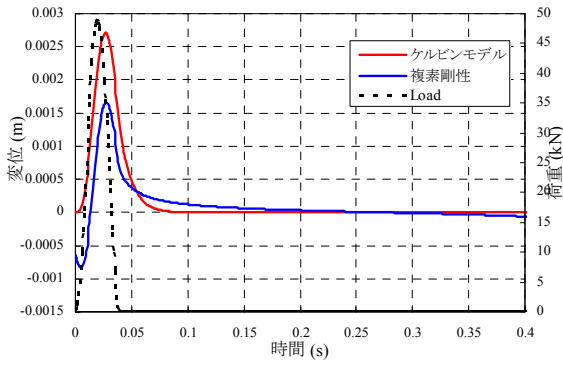
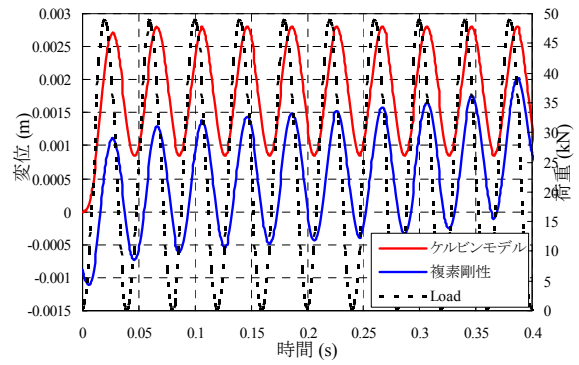
(a) 外力 $(P(t) = 49\text{kN}\sin^2 25\pi t)$ 1 波(b) 外力 $(P(t) = 49\text{kN}\sin^2 25\pi t)$ 10 波

図-3 半無限体の波動伝播

ルビンモデルの応答は、FFT、Newmark β 法とも良く一致している。次にケルビンモデルと複素剛性との相違に着目する。両解析モデルの差は、時刻 $t=0\text{s}$ に大きく現れる。外力 1 波を作用させた時、ケルビンモデルの応答値は $Z_k(t=0)=0\text{m}$ 、複素剛性は $Z_c(t=0)=-0.005\text{m}$ 。外力 10 波では、ケルビンモデル $Z_k(t=0)=0\text{m}$ に対し、複素剛性は $Z_c(t=0)=-0.002\text{m}$ である。外力がない時刻 $t=0\text{s}$ において、複素剛性では応答値が生じている。

3. 半無限体の波動伝播

力学特性を複素剛性で表すことができる半無限体の表面に動的荷重が作用するとき、波動伝播解析は次式を解くことになる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

ひずみと変位の関係は、

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5)$$

複素剛性を $E^* = E_r + iE_i$ で表すと、応力とひずみの関係は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = (E_r + iE_i) \begin{Bmatrix} a+2b & a & a & 0 \\ a & a+2b & a & 0 \\ a & a & a+2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 $a = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $b = \frac{1}{2(1+\nu)}$

ケルビンモデルでは $E_r + iE_i$ を $E + (d/dt)F$ と置き換えて解析すれば良く、FFT を使用し解を求めた。アスファルト混合物層を考慮した例題として、半無限体の層特性を、 $E = E_r = 5000\text{MPa}$, $E_i = 7854\text{MPa}$, $F = 50\text{MPa} \cdot \text{s}$, $\nu = 0.35$, $\rho = 2300\text{kg/m}^3$ と設定した。また外力には、非破壊試験 FWD の載荷荷重を参考に、 $P(t) = 49\text{kN}\sin^2 25\pi t$ を載荷半径 $r = 0.15\text{m}$ の領域に等分布載荷させて応答を求めた。図-3(a)は外力 1 波、図-3(b)は外力 10 波が作用した時の載荷直下位置 ($r = z = 0\text{cm}$) における鉛直変位を記す。1 質点系同様複素剛性では、時刻 $t=0\text{s}$ で鉛直変位が生じる。複素剛性では、FWD 試験を精度良くモデル化できないと言える。図-3(b)より、複素剛性の変位とある一定量の変位とを足し合わせれば、ケルビンモデル変位量と一致すると読み取れる。同図、外力 6 波目の振幅に着目する。ケルビンモデル振幅の極小値は $Z_k(0.206\text{s}) = 0.0009\text{cm}$ 、極大値は $Z_k(0.226\text{s}) = 0.0028\text{cm}$ 。複素剛性の極小値は $Z_c(0.206\text{s}) = -0.0004\text{cm}$ 、極大値は $Z_c(0.227\text{s}) = 0.0015\text{cm}$ である。両モデルとも振幅量は一定値 0.0019cm である。複素剛性による解析では、外力による応答の振幅は求まるが、応答の絶対量は求まらない。

4. 結果

ケルビンモデルと複素剛性モデルを解析して、次のような知見を得た。

- (1) 外力が作用していなくても複素剛性の場合、応答値が発生する。複素剛性モデルでは、FWD 試験をモデル化できないと言える。
- (2) 複素剛性モデルにより外力の振幅は求まる。しかし外力による応答の絶対量は求まらない。