逆解析手法によるヤング係数とポアソン比の同定解析手法

佐藤工業（株）　正会員　○小泉直人　黒田千歳　金子典由
中央大学　正会員　川原睦人

１．はじめに

掘削時のトンネル３次元壁面変位は切羽前方や周辺地山の影響を大きく受ける。前回，筆者等はヤング係数の同定計算 [1]を示した。今回は，掘削時の変位からトンネル周辺地山のヤング係数とポアソン比を，３次元弾性有限要素法を基本とする逆解析手法で求めた。手法として，複数の観測値と計算で求めた変位との差の二乗和による評価関数を用いた。評価関数の最小化には共役勾配法を用いた。

２．解析手法

2.1 支配方程式

地山の挙動は 3 次元弾性体とする。釣合い方程式と応力ーヒズミ方程式を(1)と(2)に示す。

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

ここで，σ_{ij}は応力を示す。D_{ijkl}をラメの定数λとμで表すと，

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{3}$$

である。δ_{ij}はクロネッカーのデルタ記号である。また，λとμをヤング係数とポアソン比で表わすと，

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (4), \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

となる。

2.2 同定解析

評価関数は観測値と計算値の差の二乗和で表わす。

$$J(p) = \frac{1}{2}\sum \left(u(p)-u^*\right)^T\left(u(p)-u^*\right) \tag{6}$$

ここで，*は計測データを，u(p)は計算値を表わす。計算値はパラメータ p（ここではヤング係数とポアソン比）の値によって変化する。評価関数を最小にするパラメータ p の値を見つけるために，評価関数の勾配をゼロとしてパラメータを求める。

評価関数の勾配は，

$$\{d\} = -\left\{\frac{\partial J}{\partial p}\right\} = -\left[\frac{\partial \bar{u}(p)}{\partial p}\right]^T\left(\bar{u}(p) - \bar{u}^*\right) \tag{7}$$

となる。ここで$\left[\frac{\partial \bar{u}(p)}{\partial p}\right]$は感度行列と呼ばれる。

一方，３次元弾性体の有限要素法方程式(8)式

$$[K]\bar{u} = \hat{\Gamma} \tag{8}$$

を，パラメータ p で偏微分すると，

$$\left[\frac{\partial K}{\partial p}\right]\bar{u}(p) + [K]\left[\frac{\partial \bar{u}(p)}{\partial p}\right] = \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial p}\right] \tag{9}$$

が得られ，(7)式と(9)式から，感度行列は，

$$\left[\frac{\partial \bar{u}(p)}{\partial p}\right] = [K]^{-1}\left\{-\left[\frac{\partial K}{\partial p}\right]\{-\bar{u}(p) + \left[\frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial p}\right]\right\} \tag{10}$$

と書き表すことができる。

2.3 ヤング係数とポアソン比の解析

感度行列(10)式のパラメータをヤング係数とするには，(10)式をヤング係数で偏微分して，

$$\frac{\partial \lambda}{\partial E} = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (11), \qquad \frac{\partial \mu}{\partial E} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

となる。また，ポアソン比をパラメータとする場合はポアソン比で偏微分して，

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{E\left(1+2\nu^2\right)}{(-1+2\nu)^2(1+\nu)^2} \quad (13), \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \frac{-E}{2(1+\nu)^2} \quad (14)$$

となる。

３．解析

3.1 解析モデル

地山として 60×60×90m の領域を設定し, 領域の中心に半径 5.35m の上半断面トンネルを掘削方向 55.2m から 4.8m 掘削した場合を想定した。28,665 節点 154,740 要素の四面体要素を用いた。観測データとして順解析の軸方向（ x 方向）変位を３点用いた(図-1,2 参照)。順解析に用いたヤング係数は 49Mpa ポアソン比は 0.3 である。上方から 75t/m^2 の一様荷重を載荷する。他面をスライド境界とした。

キィワード：ヤング係数，ポアソン比，同定解析，3 次元線形弾性体，共役勾配法
連絡先：〒103-8639　東京都中央区日本橋本町 4-12-19　TEL 03-3661-4794

3.2 数値計算例

順解析の結果を観測点とみなして，解析の検証を行なった。検証計算は表-1 に示す３ケースとした。ケース１はヤング係数のみを同定し，初期値 9.8Mpa と 98Mpa とした場合の二つの計算を行なった。ケース２ではポアソン比のみを同定し，初期値をそれぞれ，0.45 と 0.1 とした二つを計算した。ケース３では，ヤング係数とポアソン比の両方同時に同定した。

図-3 にケース１，ヤング係数の同定計算結果を示す。観測点としては，切羽から 1.2m 離れた２点を使用した。98.0Mpa から計算すると一端 0.6 まで下がった後に 49Mpa に収束した(図-3 白丸参照)。9.8 を初期値とした計算では，少ない繰返し回数で収束した。このケースではヤング計算の小さい値から漸増して収束した。図-4 にケース２，ポアソン比の同定計算結果を示す。図-5 にケース３，ヤング係数とポアソン比を同時に同定する計算結果を示す。ケース３では図-2 の３点を観測点とした。繰返し計算を 200 回終了した時点で，ヤング係数 48.1Mpa，ポアソン比 0.31 の値となった。どちらか片方のみの同定計算では早く収束するが，ふたつの同定計算では収束が遅くなった。

4　おわりに

解析手法を検証するために，順解析の結果を用いて手法の検証を行なった。今後はトンネル前方地山の物性値を同定できるかを検証していき，実際のトンネル掘削に活用していきたい。

表-1 検証計算のケース

ケース	ヤング係数の初期値	ポアソン比の初期値	
1	9.8 OR 98.0	—	ヤング係数の同定
2	—	0.45 OR 0.1	ポアソン比の同定
3	39.2	0.25	ヤング係数とポアソン比の同定

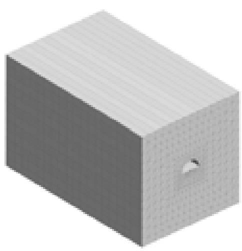

図-1　要素分割図

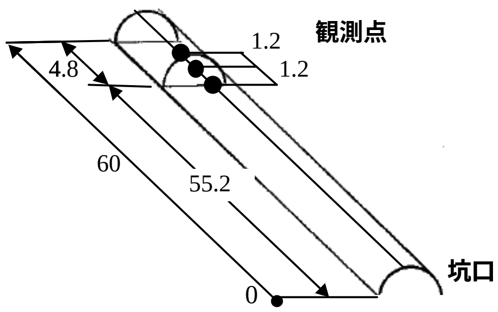

図-2 掘削長と観測点

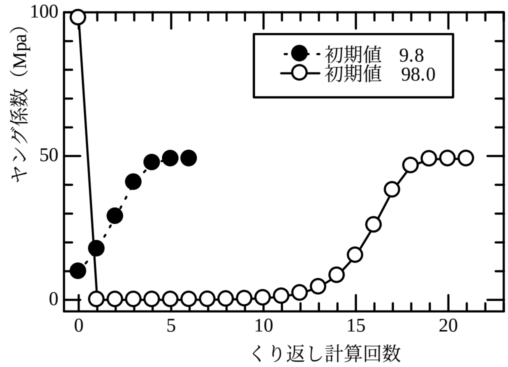

図-3 ヤング係数の同定計算（ケース１）

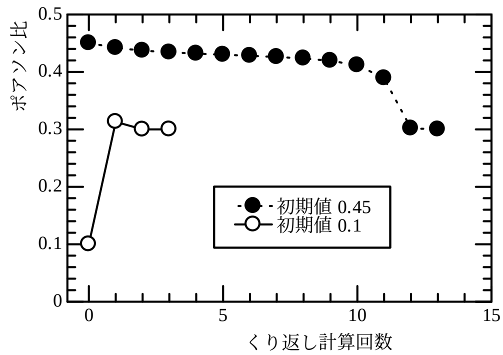

図-4 ポアソン比の同定計算（ケース２）

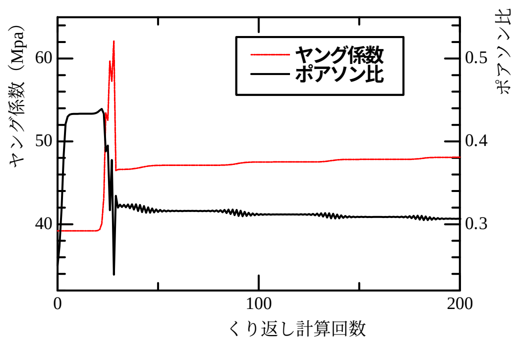

図-5 ヤング係数とポアソン比の同定計算結果（ケース 3）

参考文献

1) 樋川・川原・金子：トンネル軸方向を考慮した逆解析手法による切羽前方の地質予測，土木学会第 58 回学術講演会，Ⅲpp.19-20，2003