MPM-FDM 連成解析法による固液二相多孔質体の変形解析

京都大学大学院　学生会員　○後藤 優典　森中 雄一
京都大学大学院　フェロー会員　岡 二三生
京都大学大学院　正会員　肥後 陽介　木元 小百合

1. はじめに

浸透時や液状化時の堤防の大変形問題を FEM により数値的に解く場合，updated Lagrangian 法を用いても，要素の変形が過度になると計算が続行できなくなる．Material Point Method[1] は物体を Lagrange 粒子に離散化し全体の運動方程式の計算は Euler 格子で行うため，要素の絡み合いの問題を回避できる。地盤工学の分野でも MPM が適用されてきているものの一相系材料の解析がほとんどである．そこで本研究では，間隙流体を FDM で定式化した MPM を固液二相連成解析法へと拡張する．

2. MPM-FDM による固液二相連成解析法の定式化

2.1 MPM による運動量保存則の定式化

全体相の運動量保存則は，以下のように表せる．

$$\rho \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{1}$$

ここで，ρ は密度，$\boldsymbol{a}$ は加速度ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$ は全応力テンソル，$\boldsymbol{b}$ は物体力ベクトルである．

Terzaghi の有効応力の原理を用いる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\boldsymbol{I} = \rho \boldsymbol{\sigma}'^s + p\boldsymbol{I} \tag{2}$$

ここで，p は間隙水圧，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソル，$\boldsymbol{\sigma}'^s$ は有効応力テンソルを密度 ρ で除した比有効応力（Specific effective stress）テンソルである．

試験関数$\boldsymbol{w}$を乗じて領域 Ω に対して積分し弱形式を求める．

$$\int_\Omega \rho \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{a} d\Omega = -\int_\Omega \rho \boldsymbol{\sigma}'^s : \nabla \boldsymbol{w} d\Omega - \int_\Omega p\boldsymbol{I} : \nabla \boldsymbol{w} d\Omega + \int_{d\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS + \int_\Omega \rho \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega \tag{3}$$

ここで，Gauss の発散定理，Cauchy の定理を用いた．$\boldsymbol{\tau}$ は表面力ベクトルである．

連続体をサブドメイン Ω_p に分け，サブドメインを代表する Lagrangian 粒子へ離散化する．

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{p=1}^{N_p} M_p \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_p) \tag{4}$$

ここで，N_p は粒子数，δ は Dirac の delta 関数，$\boldsymbol{X}_p$ は粒子の位置ベクトル，M_p は粒子の質量である．M_p は定数であるため，自動的に質量保存則が満足される．

式 (4) により，式 (3) を粒子に離散化する．次に運動量保存則を計算格子上で計算するため，格子への離散化を行う．格子にはアイソパラメトリック要素を用い，位置 $\boldsymbol{x}$ における加速度 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$，物体力 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$，試験関数 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ を形状関数 $N_I(\boldsymbol{x})$ で離散化する．試験関数 $\boldsymbol{w}_I$ が任意である事を考慮し，また，Lumped mass を用いると，最終的に運動量保存則は以下のように書ける．

$$\sum_{p=1}^{N_p} M_p N_I(\boldsymbol{X}_p)\boldsymbol{a}_I + \{K_v\} p_E = -\sum_{p=1}^{N_p} M_p \boldsymbol{\sigma}'^s(\boldsymbol{X}_p) G_{Ip} + \boldsymbol{\tau}_I + \sum_{p=1}^{N_p} M_p N_I(\boldsymbol{X}_p) \boldsymbol{b}_I(\boldsymbol{X}_p) \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{a}_I$，$\boldsymbol{b}_I$，$\boldsymbol{w}_I$ はそれぞれ格子点に離散化された加速度，物体力，試験関数，下付きのインデックス $_E$ は格子を表し，p_E は格子の中心に定義する間隙水圧である．また，下記の定義を用いた．

$$\{K_v\} = \int_\Omega \{B_v\} d\Omega,\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla = \boldsymbol{w}_I \{B_v\} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\tau}_I = \int_{d\Omega} \bar{\boldsymbol{\tau}}_I N_I(\boldsymbol{x}) dS,\ G_{Ip} = \nabla N_I(\boldsymbol{x}) \,|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}_p} \tag{7}$$

2.2 FDM による連続式の定式化

液相については，液状化解析法 LIQCA2D07[2),3)] の手法に準じて，間隙水圧を MPM での空間格子の重心に定義し，FDM を用いて定式化した．連続式は次式で表される．

$$\frac{k}{\gamma_w}\left(-\rho^f \mathrm{tr}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla^2 p_d\right) + \mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{n}{K^f}\dot{p} = 0 \tag{8}$$

ここで，k は透水係数，γ_w は水の単位体積重量，ρ^f は間隙水の密度，$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソル，p_d は過剰間隙水圧，n は間隙率，K_f は間隙水の体積弾性係数である．

試験関数 w_n（領域で 1，それ以外で 0）を乗じて，弱形式を求め，Newmark の β 法で時間離散化し，加速度 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ および速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ を格子点へ離散化し，左辺第 4 項を空間差分し，間隙水圧の時間微分を後退差分し，試験関数の任意性を考慮すると，最終的に連続式は次式のように書ける．

$$\{K_v\}^T \boldsymbol{a}_I + \left(A' - \alpha'\right) p_{dE|t+\Delta t} + \sum_i \alpha'_i p_{dEi|t+\Delta t} = \frac{1}{(k/g - \gamma \Delta t)} \{K_v\}^T \left\{\boldsymbol{v}_{I|t} + \Delta t (1-\gamma) \boldsymbol{a}_{I|t}\right\} + A' p_{dE|t} \tag{9}$$

ここで，α'_i は，格子辺の長さと隣接する格子との重心間距離とで定義される定数であり，$\alpha' = \sum_i \alpha'_i$ である．p_{dEi} は当該格子に隣接する格子の間隙水圧である．

2.3 固液二相連成 MPM-FDM のアルゴリズム

計算時間増分を Δt，計算ステップを k（$1, 2, ...$）とする．

キーワード：MPM, FDM, 固液二相多孔質体, 変形解析
連絡先：〒615-8540 京都市西京区京都大学桂　京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻地盤力学研究室　075-383-3193

上付きの ^{k} は現在のステップ，^{L} はLagrangian phase，$^{k+1}$ は次のステップを表す．図 1 にアルゴリズムを示す．

1. 対象を有限のサブドメインに分割し，各々を代表する粒子の質量 M_p，初期速度，初期水圧を決定する．
2. 空間格子を決定し，境界条件を設定する．
3. 粒子の質量 M_p を用いて格子点の質量 m_I^k を決定し，粒子の速度 $\boldsymbol{V}_p^k$ を用いて格子点の速度 $\boldsymbol{v}_I^k$ を求める．

$$m_I^k \boldsymbol{v}_I^k = \sum_{p=1}^{N_p} M_p \boldsymbol{V}_p^k N_I(X_p)^k \qquad (10)$$

5. 粒子の水圧 p_{dEp}^k から格子の水圧 p_{dE}^k を求める．格子内に存在する粒子の水圧の平均値を格子中心の水圧とする．
6. 運動方程式と連続式を解き，格子点の加速度 $\boldsymbol{a}_I^k$ と格子の水圧 p_{dE}^L を求める．
7. $\boldsymbol{a}_I^k$ を時間積分し，格子点の速度 $\boldsymbol{v}_I^L$ を求める．
8. $\boldsymbol{v}_I^L$ を用いて粒子のひずみ増分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1}$ を求める．
9. 構成関係を用いて，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1}$ から粒子の応力増分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1}$ を求める．
10. 形状関数を用いて粒子の速度 $\boldsymbol{V}_p^k$ を更新する．
11. 格子内の粒子には，その格子の水圧 p_{dE}^L を与える．
12. 2. に戻る．

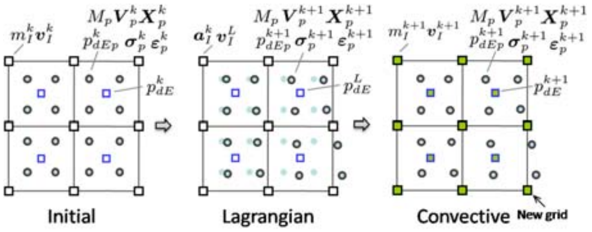

図 1：固液二相連成 MPM-FDM のアルゴリズム

3. 飽和多孔質弾性体の変形解析

解析に用いた二次元飽和多孔質弾性体の解析モデルおよび境界条件を図 2 に示す．排水境界は粒子に与え，計算時に格子に反映させた．荷重は 1000 秒間で 50kPa の等分布荷重を漸増載荷した．荷重も粒子に与え，計算時に形状関数により格子に外挿した．ポアソン比 ν は 0.45，ヤング率 E は 4350kPa，密度 ρ は 1.5(Mg/m^3)，Newmark の β は 0.5，γ は 1.0，透水係数 k は 5.52×10^{-5}(m/s)，時間増分 Δt は 0.0005(s) とした．図 3 に変形図と間隙水圧の分布を示す．荷重により圧縮変形し間隙水圧が発生するが，上部の排水境界に起因して間隙水圧が分布している事がわかる．図 4 はマスとしての鉛直変位について，同条件で行った FEM の解析結果，一次元モデルを仮定した理論計算値と比較した．二相系に拡張した MPM 法は FEM よりもやや小さな変位量となったが，概ね妥当な解が得られた．図 5 に水圧の時系列変化を示している．間隙水圧は変位速度に依存して発生しており，変位速度が 0 になると間隙水圧は消散していることがわかる．さらにアルゴリズム 10 において粒子の速度 V_p の更新時に a_I^k を用いる場合 (図中 MPM ①) と v_I^L を用いる場合 [4](図中 MPM ②) とを比較したところ前者の方がより FEM と近い値を得た．

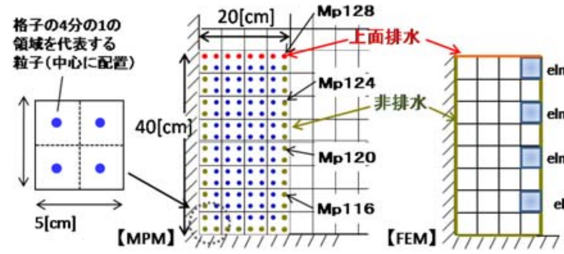

図 2：解析モデルと境界条件

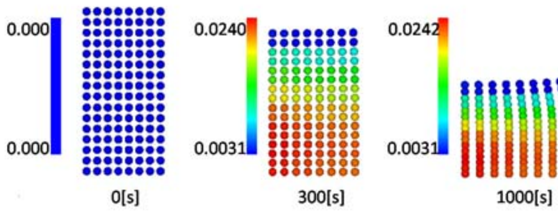

図 3：変形図と間隙水圧分布（変位 50 倍）

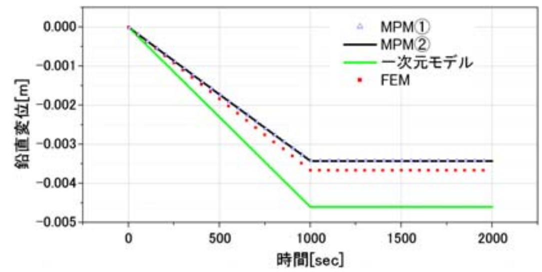

図 4：鉛直変位 - 時間関係

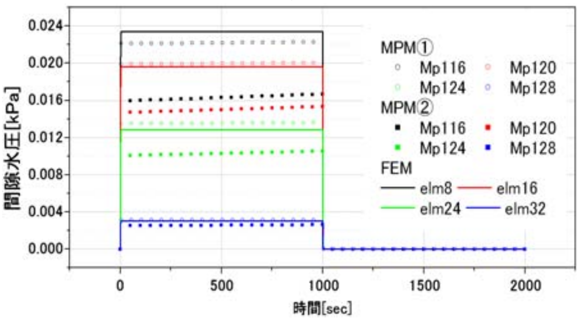

図 5：間隙水圧 - 時間関係

4. まとめ

MPM を固液二相系に拡張した変形解析法を提案した．二次元飽和多孔質弾性体の変形解析を行い，FEM の解析結果と比較し解の妥当性を検証した．

謝辞

MPM についてご意見を頂いている，University of Missouri-Columbia の Z.CHEN 教授に謝意を表します．本研究は，財団法人河川環境管理財団の河川整備基金助成事業の一環として実施しており，ここに謝意を表します．

参考文献

1)Sulsky, D. etal: *Comput. methods Appl. Engrg.*, 118, pp.179-196, 1994., 2) 液状化解析手法 LIQCA 開発グループ:LIQCA2D07(2007 年公開版) 資料，2007. 3)Oka, F. etal: Applied Scientific Research, 52, pp.209-245, 1994. 4) 肥後，後藤，岡，木元，森中: MPM 法による固液二相多孔質体の変形解析，第 43 回地盤工学研究発表会，広島，2008.