

下負荷面 Cam-clay モデルの応力積分法の開発と支持力解析への適用性検討

東北大学 学生会員 ○中市翔也
 学生会員 藤澤利光
 正会員 山川優樹
 正会員 池田清宏

1. はじめに

進行性破壊を伴う地盤の支持力強度や沈下変位を正確に評価するためには、地盤材料のピーク強度から残留強度に至るまでの挙動を考慮した解析が必要である。密な砂や過圧密粘土に特有の体積膨張を伴う硬化・軟化挙動を表現する弾塑性モデルとして下負荷面 Cam-clay モデルが提案されている¹⁾。これを効率的に数値解析に適用するための高精度な応力積分アルゴリズムの開発と有限要素解析コードへの実装が求められている。本研究では下負荷面 Cam-clay モデルの陰解法応力積分法を開発し、有限変形解析コードに実装した。この解析手法を基礎の支持力解析に適用し、解析精度・解の収束性・大きな増分ステップを用いた場合のロバスト性について検証した。

2. 陰解法応力積分アルゴリズム

ここでは下負荷面 Cam-clay モデルに対する陰解法応力積分法を提案する。等方材料に限定し、弾性対数主ひずみ空間でリターンマッピングを行う方法を採用する。変形勾配 F を弾性・塑性部分に乗算分解し $F = F^e \cdot F^p$ とし、体積変化 J は

$$J = \det F = \det(F^e \cdot F^p) = \det F^e \det F^p = J^e J^p \quad \dots\dots\dots (1)$$

と与えられる。主ストレッチを λ_A , ($A = 1, 2, 3$) とし、それらの弾性・塑性部分は $J^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e$, $J^p = \lambda_1^p \lambda_2^p \lambda_3^p$ となる。対数主ひずみは $\varepsilon_v = \log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ と与えられる。ここで用いる、下負荷面 Cam-clay モデル降伏関数は

$$f(p, q, \theta; p_c, R) = \frac{\zeta_f^2(\theta) q^2}{M^2} + p(p - R \cdot p_c) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表される。ここで、不変量として等方応力 $p = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma]$, 偏差応力 $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\sigma]\|$, Lode 角 $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$ とし、 $\zeta_f(\theta)$ は Lode 角依存性を表現する関数である。また、 R は正規降伏面と下負荷面の相似比とし、 $R \cdot p_c$ は下負荷面の大きさとなる。

塑性挙動における応力偏角 (Lode 角) 依存性を考慮した構成モデルでは、リターンマッピングの際に、増分形式の塑性流れ則を次式のように主ひずみ 3 成分についての式として表すことができる。

$$\varepsilon_{A,n+1}^e = \varepsilon_{A,n+1}^{e,(\text{trial})} - \frac{\Delta\lambda}{J_{n+1}} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_A} \quad (A = 1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、上付きの (trial) は試行値を表し、 $\Delta\lambda$ は増分表示の塑性乗数を表す。塑性硬化則の増分形式は、

$$p_{c,n+1} = p_{c,n} \exp[-\Theta(\varepsilon_{v,n+1}^{e,(\text{trial})} - \varepsilon_{v,n+1}^e)] \quad \dots\dots\dots (4)$$

とし、ここで $\Theta = \frac{1}{\lambda - (1 - \lambda \kappa^*)}$ は塑性硬化係数である。次に、下負荷面係数 R の発展則は増分表示で次式で表す。

$$R_{n+1} - R_n = \Delta\lambda \mathcal{R}(R_{n+1}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\mathcal{R}(R)$ は R の発展を規定する関数である。以上より、リターンマッピングでは、 $f(p, q, \theta; p_c, R) = 0$ の条件の下で式 (3), (5) を $\varepsilon_{A,n+1}^e$, R_{n+1} , $\Delta\lambda$ について解くことになる。残差ベクトル $r(x)$ および未知量ベクトル x は次のように定義する。

$$r(x) = \begin{bmatrix} J_{n+1} \varepsilon_{A,n+1}^e - J_{n+1} \varepsilon_{A,n+1}^{e,(\text{trial})} + \Delta\lambda \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_A} \\ R_{n+1} - R_n - \Delta\lambda \mathcal{R}(R_{n+1}) \\ f(p_{n+1}, q_{n+1}, \theta_{n+1}; p_{c,n+1}, R_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{A,n+1}^e \\ R_{n+1} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}, \quad (A = 1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (6)$$

以下では非線型方程式 $r(x) = 0$ を x について線形化し、反復解法により解くことになる。第 k 回目の反復での修正量を δx とし、

$$r(x^k) + A^k \delta x = 0, \quad A^k := \frac{\partial r(x^k)}{\partial x} \rightsquigarrow \begin{cases} \delta x^k = -[A^k]^{-1} r(x^k), \\ x^{k+1} = x^k + \delta x^k \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

というように $\|r(x)\| < \text{TOL}$ となるまで x の更新を繰り返す。

また、リターンマッピングのアルゴリズムに整合した接線係数を

$$c_{n+1}^{\text{ep}} := \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,(\text{trial})}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

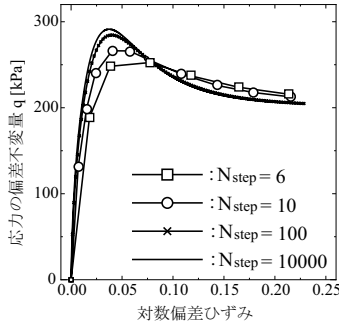
とすることにより、Newton - Raphson 法本来の 2 次収束を確保することが出来る。

Keywords: 陰解法応力積分, 有限要素法, 下負荷面 Cam-clay モデル

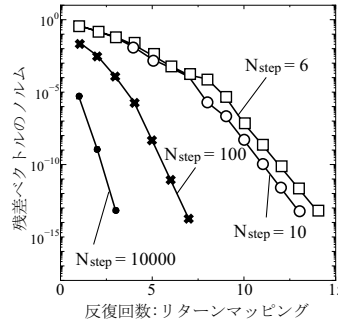
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: nakaichi@civil.tohoku.ac.jp

3. 構成式応答の評価

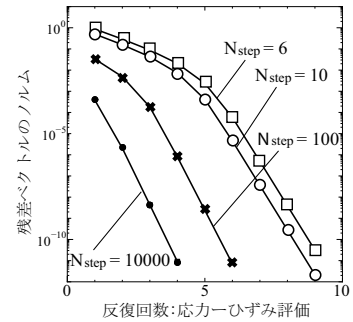
一要素の三軸圧縮解析を行い、第2章で提案する応力積分アルゴリズムの性能を検証する。所定の変形量を異なるステップ数に分割して与え、Newton-Raphson 法によるリターンマッピングの繰り返し計算に増分ステップサイズが与える影響を検証する。初期状態を等方圧状態とし、硬化・軟化を示す過圧密比 $OCR = 10$ とした過圧密状態の地盤材料に対し、変形量の所定量を $N_{step} = 6, 10, 100, 10000$ と等分割する。図-1(a) に応力-ひずみ関係を示す。三軸試験において残留状態を示す大変形に至るまで $N_{step} = 6$ でその経路が追えている。また、図-1(b) に所定の変形量に至る最終ステップでのリターンマッピングの際の誤差ノルム $\|r(x)\|$ の収束状況を示す。 $N_{step} = 6$ の場合に着目すると、反復計算1回目の誤差は 10^0 オーダーであるが、その後良好な収束状況を示しており、少ない増分ステップにより追跡した大変形時においても、リターンマッピングにより得られる応力の精度の高さが確認できる。また、図-1(c) は応力-ひずみ関係の経路追跡の際の Newton-Raphson 法における誤差の収束状況を示す。この場合も $N_{step} = 6$ のように少ない増分ステップでも Newton-Raphson 法本来の2次収束が見られる。以上より、大きな増分ステップでもロバスト性の高い経路追跡が可能であることが示される。



(a) 応力-ひずみ曲線



(b) 誤差の収束状況: リターンマッピング



(c) 誤差の収束状況: FEM の反復結果

図-1 一要素の三軸圧縮解析による性能評価

4. 2次元帯基礎の支持力解析

2次元帯基礎の支持力問題のすべり線形成を伴う進行性破壊の過程のシミュレーションを行う。ここでは、Lode角依存性は考慮せず偏差応力面における等方圧軸を中心とした同心円状の降伏面形状、すなわち $\rho = 1$ とし、下負荷面 Cam-clay モデルを導入した陰解法有限要素解析アルゴリズムの支持力解析への適用性および、材料定数等が与える支持力挙動への影響を検証する。解析モデルは図-2 に示したものをを用いる。解析に用いる材料定数はせん断弾性係数 $\mu_0 = 20\text{MPa}$ 、せん断弾性 μ の等方応力依存性 $\alpha = 400$ 、弾性圧縮係数 $\tilde{\kappa} = 0.003$ 、弾塑性圧縮係数 $\tilde{\lambda} = 0.008$ 、摩擦角 $\phi = 30^\circ$ とした。初期応力状態での静止土圧係数 $K_0 = 0.5$ とし、上載圧 16.6kPa に対し先行圧密応力を $p_c = 200, 400\text{kPa}$ と変化させて異なる過圧密状態で解析を行う。

得られる荷重-沈下量曲線を図-3 に、偏差ひずみ分布の進展を図-4 に示す。各々の先行圧密応力による圧密状態を反映した荷重のピーク値を示した荷重-沈下量曲線を追跡できている。また、その後荷重低下挙動を示し、残留状態で同一の荷重に落ち着いており、さらに Prandtl の理論解に近接している。偏差ひずみ分布に着目すると、荷重ピーク付近では主動くさびを形成するように基礎端部よりひずみ集中域が発生し、残留状態ではすべり線が形成されていることが確認できる。

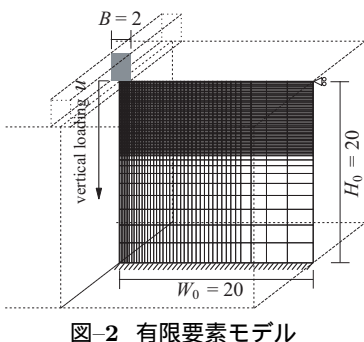


図-2 有限要素モデル

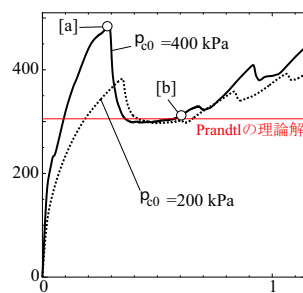


図-3 荷重-沈下量曲線

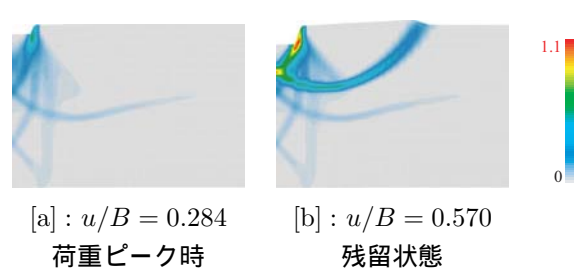
[a]: $u/B = 0.284$ 荷重ピーク時
[b]: $u/B = 0.570$ 残留状態

図-4 偏差ひずみ分布の進展

5. 結論

非古典弾塑性構成モデルとして、下負荷面 Cam-clay モデルを陰解法応力積分アルゴリズムへ導入した解析を行い、その軟化挙動等の実現に基づく現象を精度良く求められたことにより、解析コードの有用性を示すことができた。また、この解析手法を支持力問題に適用し、モデルの特性を反映した効率的な支持力解析を行うことができたことにより、困難な境界値問題に対する適用性を確認できた。

参考文献

- 1) 橋口公一, 上野正実, 陳忠平: 下負荷面および回転硬化の概念に基づく土の弾塑性構成式, 土木学会論文集, No. 547, pp. 127-144, 1996.