

# 格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析における 河床勾配の取り扱いに関する検討

中央大学大学院 学生員 楠 和也  
中央大学 正会員 櫻山 和男

## 1. はじめに

近年, 数値流体力学の新しい手法として, 格子ボルツマン法<sup>1), 2)</sup> (LBM: Lattice Boltzmann Method) が注目を集めている。著者らは, これまで LBM に着目し, 非構造格子に適用可能な CIVA-LBM を開発<sup>3)</sup> し浅水長波方程式への適用を行ってきた<sup>4)</sup>。しかしながら, 浅水長波流れ解析において河床勾配の影響についての検討は十分になされていなかった。

そこで本論文では, LBM による浅水長波流れ解析における河床勾配の取り扱いについて検討するものである。数値解析例として潮流解析を取り上げ, 河床勾配の評価法について比較検討した。

## 2. 格子ボルツマン法

### (1) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法において, 衝突演算項に格子 BGK モデルを用いた格子ボルツマン方程式は以下のように表わされる。

$$f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left[ f_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - f_{\alpha}^{eq}(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \quad (1)$$

上式において, 左辺は粒子の並進過程, 右辺の第 1 項目は衝突過程, 2 項目は外力項をそれぞれ示している。\$f\_{\alpha}\$ は \$\alpha\$ 方向の粒子がどれくらい存在するかということを表す粒子分布関数, \$f\_{\alpha}^{eq}\$ は局所平衡分布関数である。式 (1) の \$e\$ は \$e = \frac{\Delta x}{\Delta t}\$ で定義され, \$\Delta t\$ は微小時間増分量, \$\Delta x\$ は格子サイズである。なお, 本論文では 2 次元 9 速度モデル (図-1) を用いており, 粒子分布関数などの添え字 \$\alpha\$ は図の数字と対応している。また, \$F\_i\$ は外力項であり, 以下のように与えられる。

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{wi}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i \quad (2)$$

上式において, \$\rho\$ は流体密度, \$z\_b\$ は河床高度, \$\tau\_{bi}\$ は底面でのせん断応力, \$\tau\_{wi}\$ は自由表面でのせん断応力, \$E\_i\$ はコリオリ力である。なお, 上式第 1 項目の河床勾配の評価方法については, 以下の 2 通りについて検討した。

#### a) Basic Scheme

全水深と河床勾配をその節点値のみで評価する手法である。簡便に評価することができるが, 標高データが不連続で河床勾配を解析的に求めることのできない問題に対して安定に解析できない欠点を有している。

$$-gh(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} z_b(x, t) \quad (3)$$

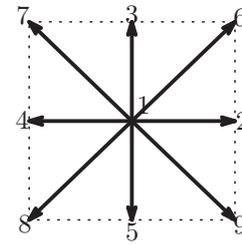


図-1 2次元9速度モデル

#### b) Centred Scheme

全水深と河床勾配をその節点値と並進した先の節点値を用いて評価する手法であるため, 標高データが不連続な地形に即した問題に対しても有効な評価法であると考えられる。

$$-gh\left(x + \frac{1}{2}e_{\alpha}\Delta t, t\right) \frac{\partial}{\partial x_i} z_b\left(x + \frac{1}{2}e_{\alpha}\Delta t, t\right) \quad (4)$$

また式 (1) において, \$\tau\$ は単一時間緩和係数と呼ばれる定数であり, 1 タイムステップの衝突で粒子が格子点上において一定の割合 \$\frac{1}{\tau}\$ で局所的な平衡状態に近づいていくことを示している。\$\tau\$ は, 鉛直方向に積分された滑動粘性係数 \$\nu\_e\$ と以下のような関係にある。

$$\tau = \frac{3\nu_e}{e^2\Delta t} + \frac{1}{2} \quad (5)$$

なお, 式 (2) における \$z\_b\$ の定義は図-2 のようになっている。

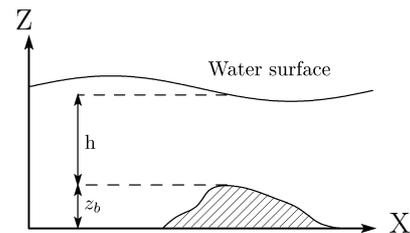


図-2 水深定義図

#### (2) 局所平衡分布関数

局所平衡分布関数は, ある空間内において平衡状態になった場合の粒子の分布を表す関数であり, 巨視的変数である全水深と流速によって決定され, 以下の式で表される。

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 1 \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i \\ + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \alpha = 2 \sim 5 \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i \\ + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \alpha = 6 \sim 9 \end{cases} \quad (6)$$

**KeyWords:** 格子ボルツマン法, 非構造格子, 浅水長波解析

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail kusunoki@civil.chuo-u.ac.jp

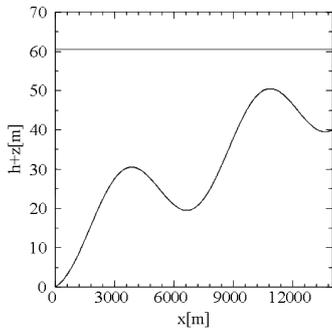


図-3 解析モデル

上式において,  $h$  は全水深,  $u_i$  は流速,  $g$  は重力加速度である. なお, 上式の係数は, 巨視的速度においてべき級数を取り, 質量保存, 運動量保存, エネルギー保存を満たすように決定されている.

### (3) 流れの巨視的変数

流体の巨視的変数である全水深及び速度は, その粒子分布関数と粒子の並進速度ベクトルを用いて以下のように計算される.

$$h = \sum_{\alpha}^9 f_{\alpha} \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha}^9 \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (8)$$

## 3. 数値解析例

### (1) 潮流解析 1

数値解析例として滑らかな河床勾配を有する潮流解析を取り上げる. 解析モデルを図-3 に示す.

初期条件として水深は以下の式により与えることとする.

$$H(x) = 50.5 - \frac{40x}{L} - 10 \sin\left(\pi\left(\frac{4x}{L} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (9)$$

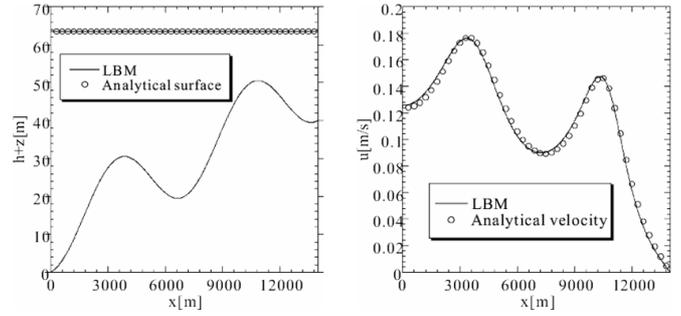
上式において, 河床は  $L = 14000m$  である. 水面はフラットであるから, 標高値は  $z_b(x) = H(0) - H(x)$  で表される. また, 境界条件は以下の式で与える.

$$h(0, t) = H(0) + 4 - 4 \sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (10)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (11)$$

また,  $u(0, t)$  においては粒子分布関数 0 勾配<sup>5)</sup> を適用した. 分割数は  $x$  方向に 1000 分割とし, 単一時間緩和係数  $\tau$  は 0.6 とした. なお, 河床勾配の評価法としては Basic scheme を用いて計算した.

計算結果として図-4 に 9117.5 秒後の (a) 水位図及び, (b) 流速図を示す. 図-4 より, 水位図, 流速図ともに解析解と定量的な一致が得られていることがわかる. この問題は式 (9) より, 河床勾配が滑らかで解析的に求められるため, Basic Scheme でも安定に解析が行えていることが確認できる.



(a) 水深図

(b) 流速図

図-4 9117.5 秒後の解析結果

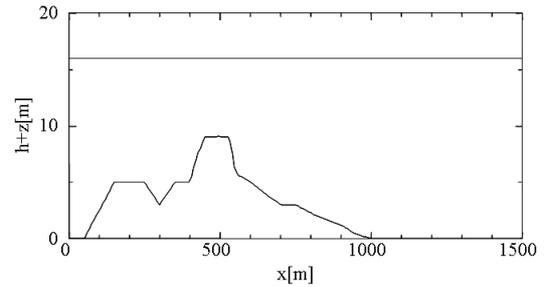


図-5 解析モデル

### (2) 潮流解析 2

数値解析例として解析的に求められない河床勾配を有する潮流解析を取り上げた. 解析モデルを図-5 に示す.

初期条件としての水深は  $h(x, 0) = 16 - z_b(x)$  で与える. また, 境界条件は以下の式で与える.

$$h(0, t) = 20 - 4 \sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (12)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (13)$$

上式において, 河床は  $L = 1500m$ , 微小時間増分量  $\Delta t$  は 0.3, 単一時間緩和係数  $\tau$  は 1.5 とした.

解析結果として, Basic Scheme を用いた時の計算結果と Centred Scheme を用いた時の計算結果とを比較したものを講演時に示す.

## 4. 終わりに

LBM による浅水長波流れ解析における河床勾配の取り扱いについて検討した.

### 参考文献

- 1) Chen, S., and Doolen, G.D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, pp.329-364, 1998. Oxford University Press, 2001.
- 2) 稲室隆二: 格子ボルツマン法, 物性研究, pp.197-232, 2001.
- 3) 立石絢也, 榎山和男: CIVA-格子ボルツマン法による非構造格子を用いた非圧縮性粘性流体の解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.323-329, 2004.
- 4) 石川裕士, 立石絢也, 榎山和男: 非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析, 第 19 回数値流体力学シンポジウム論文講演集 (CD-ROM), 2005.
- 5) J.G.Zhou: Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows, Springer, 2003.