ベキ変換を用いた高波の頻度解析法

ジェイアール東海コンサルタンツ(株)　正会員　○ 森瀬 喬士
名古屋工業大学　社会工学専攻　正会員　北野 利一

１．研究の目的　沿岸構造物の設計に必要となる高波来襲の頻度解析を行う際，波高の母分布の候補として，ワイブル分布を用いることが多い．ワイブル分布は指数分布を含む分布族であり，ワイブル分布の漸近分布はガンベル分布である．指数分布からガンベル分布への収束性は極めて速いけれども，形状母数を変化させて指数分布から乖離するにつれて，ワイブル分布は，漸近収束性が遅くなることが知られている．そのような意味で，伝統的に海岸工学では，期間最大波高の母分布が極値分布に漸近収束するには，現実的な観測期間では不十分である可能性を考慮に入れ，ワイブル分布を採用してきたともいえよう．

３母数ワイブル分布に対して，最尤推定が可能な形状母数の値の範囲が限定されている．そのためか，伝統的に海岸工学では，形状母数を先見的に与え，位置母数と尺度母数を最小自乗法を用いて推定してきた．その形状母数の値として，Petruaskas ・Aagaard (1970) が提案した７種類（$k = 0.75$, 0.85, 1.0, 1.1, 1.25, 1.5, 2.0）を，合田 (1988) は４種類（$k = 0.75$, 1.0, 1.4, 2.0）の値に絞り込んでいる．その理由として，高波標本の現実的なサイズを考慮に入れれば，それ以上に細かく分類しても，分布相互の際を識別することが困難であるためとしており，ほぼ等比数列となる値を形状母数に選んでいる．したがって，合田 (1988) が推奨する４種類の値は，確率分布特性に由来するものであり，高波の力学的特性によるものではない．

高橋 (2006) によれば，ある条件のもとで，極値と極値のベキ乗量の従う一般化極値分布の形状母数が一致する．その条件とは，一般化極値分布の形状母数が非負値をとることである．逆に，正値の形状母数をもつ一般化極値分布に従う極値に対して，そのべき乗量が従う漸近分布の形状母数は，異なる値となる．ワイブル分布の漸近分布はガンベル分布であるので，ワイブル分布に従う変量のベキ乗量は常にガンベル分布に従う．したがって，適切なベキ数で波高をベキ変換した量を対象にすれば，ワイブル分布を用いた解析ではなく，ガンベル分布を用いた極値解析が可能である．本研究では，高波に対して極値解析を行うことを主眼に置いて，そのために相応しい波浪の物理量を検討し，ベキ変換を用いた高波の頻度解析法を提案する．また，提案する方法の有用性についても議論する．

表-1　ワイブル分布の裾厚度

k (Weibull)	0.75	1.0	1.4	2.0
λ = 1	0.21	0.07	-0.05	-0.15
2	0.15	0.03	-0.06	-0.14
4	0.11	0.02	-0.06	-0.12
8	0.09	0.01	-0.06	-0.11
16	0.07	0.00	-0.05	-0.10
32	0.06	0.00	-0.05	-0.09

２．ワイブル分布の漸近収束性　高波の頻度解析に用いられる３母数のワイブル分布は，

$$G(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-B}{A}\right)^{k}\right\} \tag{1}$$

と表される．ここで，A および B は尺度母数および位置母数であり，k は形状母数である．表-1 に示すとおり，北野 (2004) が提案する裾厚度 ξ_{10} の値を見るとおり，ワイブル分布の形状母数 k が 1.0 であれば，年発生数 λ の増加に対して，裾厚度はゼロに収束する．母数 k が残りの場合には，年発生数 λ の増加に対する裾厚度の変化は小さく，ゼロに収束しない．このことは，ワイブル分布を母分布として疑似乱数で生成される標本波高 H_i を用いて具体例を示すことができる．すなわち，閾値をこえる超過平均および超過メディアンが，閾値の変化に対して，勾配ゼロの水平線に漸近することである．図-1 に示すように，水平線への収束性は非常に緩慢で，理論曲線が補助線として無ければ，水平線への収束性に気付きにくい．他方，同じ標本を用いて，ベキ変換量 H_i^2 の超過平均および超過メディアンを図-2 に示す．この場合は，閾値の下限から，超

キーワード：ガンベル分布，ワイブル分布，信頼区間，再現期間，経験度，設計波
連絡先：名古屋市昭和区御器所町・名古屋工業大学・052-735-5498

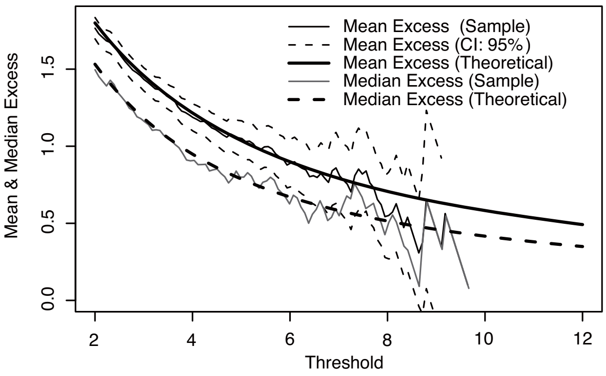

図-1 標本波高のガンベル分布への収束性

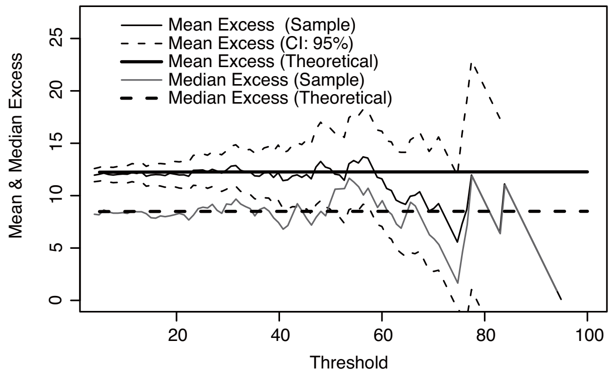

図-2 標本波高の自乗量のガンベル分布への収束性

過平均および超過メディアンの勾配がゼロとなっている．すなわち，急速に収束していることが明らかである．このように，式(1)で表されるワイブル分布 G とその変数 $z^{1/p}$ に対して，

$$G^m\left(z^{1/p}\right) \approx \exp\left\{-\exp\left(-\frac{z^{k/p}-\beta}{\alpha}\right)\right\} \tag{2}$$

と近似され，その収束は急激である．また， $k=p$ となる場合，式(2)の右辺は，変数 z に対するガンベル分布となる．したがって，形状母数 k のワイブル分布に従う波高 H に対して，ベキ変換量 H^k の漸近分布はガンベル分布に急速に収束することがわかる（北野, 2007）.

４．波浪の物理量 微小振幅波理論（例えば，Lamb, 1932）によれば，波高の自乗量 H^2 は，波の進行方向の単位長さ当たりの平均エネルギーを表す．合田 (2002) によれば，Wilson の波浪推算式に基づけば，極大波の周期 T は，波高 H の 0.63 乗に比例することが示される．これは，Toba (1977) の 3/2 乗則に相当するものである. この関係を利用すれば, 高波として重要な物理量である，1波あたりのエネルギー, エネルギー密度（wave action），波の運動量，ストークス波の非線形項の大きさは，順に，ベキ数を 3.26，2.67，1.37，0.74 とする波高のベキ乗量に比例する量となる．これらの値は，合田(1988)が推奨するワイブル分布の形状母数の値に相当するものを含んでいる. また，山口ら (1997) が指摘する，$k>2$ の形状母数も検討すべきであることを裏付けるものである. 図-3 は，Kodiak 沖の高波資料に対して，波高のベキ変換量（$p=0.75$，1.0，1.4，2.0，2.6，3.3）を対象に，プロファイル対数尤度を比較してものである．この場合，ベキ数 $p=2.0$, 2.6 ないしは 3.3 が適していることがわかる.

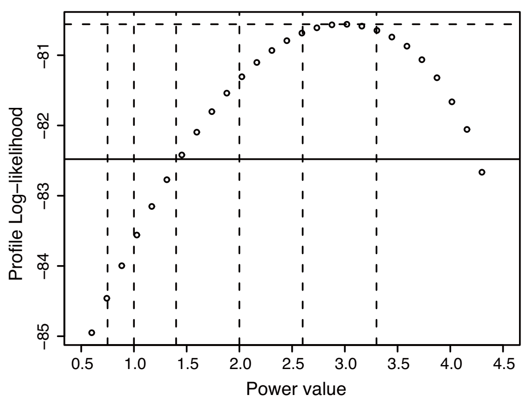

図-3 プロファイル尤度による適したベキ数の選択

５．提案する頻度解析の有用性 北野ら (2008) により，信頼区間に代わるものとして，経験度 K という指標が提案されている．経験度は，ベイズ統計学における事後分布として，年発生数 λ の推定分布の特性から誘導されるものであり，極値解析を利用することにより増分する情報量を，単位情報量で除して得られる．経験度 K の値が 2 以上でなければ，ほとんど意味の無い解析結果と判定されるものであり，K の値の増加とともに, 標本が有する情報が多く, 推定に伴う誤差が小さいことがわかる指標である．閾値 u をこえる波高の生起頻度 λ_u と対象とする確率波高 x の頻度 λ_x （再現期間の逆数）を与えれば，観測年数 N に対する経験度の比 K/N が得られる．観測期間 $N=20$ 年の Kodiak 沖の高波資料の場合，ベキ乗量を用いた解析では，閾値 $u=6$ m の波高をこえる資料（全資料 78 ）を用いることができる（$\lambda_u=3.9$ ）．この時，100 年確率波高（$\lambda_x=0.01$）に対して， K/N =0.11 と得られるので，経験度は 2.2 となる．他方，波高そのもので解析する場合には，ガンベル分布への収束が遅いので，閾値 $u=9$ m （$\lambda_u=0.5$ ）とせざるを得ず，その場合は，K/N =0.02 となり，経験度が２以上となるには，100 年分の資料が必要であることがわかる.