

格子ボルツマン法を用いた物体周り流れの解析

東北大学大学院 学生会員 荒木 健
 東北大学大学院 正 会 員 越村 俊一

1. はじめに

格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method, 以下LBM)は, 流体を格子上を並進・衝突する仮想的な粒子の集合体ととらえ, 格子上の粒子分布関数を用いて, 質量・運動量保存則を満たすように流体の巨視的変数を求める手法である. 有限差分法などの連続体としての流体の方程式を解く従来の手法と異なる新しい津波計算手法として注目されている. 現在, 浅水理論に基づいたLBMの検討が行われているが(大家ら, 2007), 津波現象を再現する上で構造物周りなど, 流れの鉛直速度成分が無視できない場合も多い. そこで本研究ではNils(2007)に倣い, ナビエ・ストークス式に基づくLBMを物体周りの流れ場に適用し, LBMの津波計算への適用の有効性の検討への足がかりとする.

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子形状

2次元の格子形状には図-1の2次元9速度モデルが広く用いられている. 粒子の速度 $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ は, それぞれ $0 (i = 1)$, $e (i = 2, 3, 4, 5)$, $\sqrt{2}e (i = 6, 7, 8, 9)$ となる. ここで, 格子間隔 Δx 及び時間刻み幅 Δt により $e = \Delta x / \Delta t$ である. つまり1タイムステップ後に粒子は必ず格子点上に位置する. 時刻 t , 位置 \mathbf{x} で i 方向の速度を持つ粒子の分布関数を $f_i(\mathbf{x}, t)$ とする.

(2) 格子ボルツマン方程式

格子ボルツマン法は, 仮想粒子の並進と衝突の二つの過程からなる. 並進過程において, 粒子は速度に応じた方向の隣接する格子点へと移動する. 粒子分布関数 f は次のように表せる.

$$f_i'(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x} + \Delta t \mathbf{e}_i, t) \quad (1)$$

キーワード 格子ボルツマン法

連絡先 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻
 字青葉6-6-11 東北大学大学院工学
 研究科 TEL022-795-7515

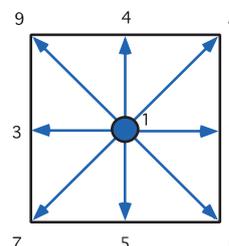


図-1 2次元9速度格子

ここで, \tilde{i} は i と逆向きであることを表す. 衝突過程は, 粒子分布が単一割合で局所平衡状態へ近づくと仮定したBGKモデルを用いて次のように表せる.

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = (1 - \omega) \tilde{f}_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \omega f_i^{eq} \quad (2)$$

ここで, $\omega = 1/\tau$ であり, τ は単一時間緩和係数である. τ により流体の平衡状態へ達する速さが決まる. また f_i^{eq} は局所平衡状態における粒子分布関数である.

(3) 局所平衡分布関数

局所平衡状態とは, ある格子点で粒子の出入りの収支が一致する状態のことである. 局所平衡分布関数はマクスウェル分布を \mathbf{u} についてテイラー展開することで求められ, 次のようになる.

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left[1 - \frac{3}{2}(\mathbf{u})^2 + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 \right]$$

$$\text{ここで } w_i = \begin{cases} 4/9 & (i = 1) \\ 1/9 & (i = 2 \sim 5) \\ 1/36 & (i = 6 \sim 9) \end{cases} \quad (3)$$

(4) 重力

重力 \mathbf{g} は次のように取り入れる. 局所平衡分布関数を求める際には次式の流速を用いる.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \tau \mathbf{g} \quad (4)$$

(5) 巨視的変数

各セルの密度 ρ , 流速 \mathbf{u} は粒子分布関数から次式を用いて求められる.

$$\rho = \sum_i f_i \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{e}_i f_i / \rho \quad (6)$$

(6) 境界条件

a) bounce-back条件

壁面と隣接する流体セルにおいて、壁面から流体へ流れる方向の粒子分布関数は式(1)では求めることができない。そこで、粒子を壁面で 180° 跳ね返すbounce-back条件を用いる。壁面の隣のセルでは運動量が0となり、bounce-back条件はno-slip条件の一種である。

3. 計算例

(1) 二次元poiseuille流れでの検証

まず2次元poiseuille流れに適用し、解析解との比較を通じてモデルの精度を検証した。上下二枚の板にはbounce-back条件を用い、左右の流入・流出境界には周期境界条件を用いた。図2から、解析解と同様の流速の放物線分布が得られ、よく一致していることが分かる。ただし、動粘性係数 ν を小さく(τ を0.5に近づける)していくと、誤差が大きくなることが確認された。

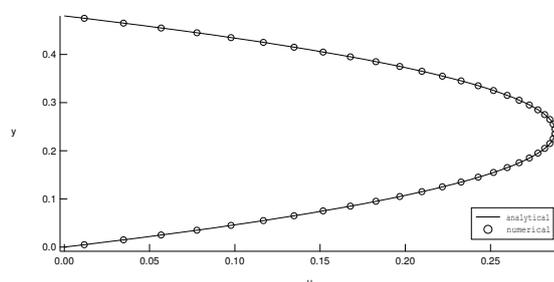


図-2 2次元poiseuille流れの流速分布($\nu = 0.01$)

(2) 正方形物体周りの流れ

図-3のような領域を対象に、 1500×500 の格子サイズで計算を行った。時間間隔は $dt = 10^{-4}$ とした。上下の壁面及び正方形物体の表面の境界にはbounce-back条件を用いた。流入境界は x 方向流速 $u_x = 0.6$ (m/s)の一様流を流入させ、流出境界は自由流出とした。動粘性係数 ν の値を変化させることで、レイノルズ数 Re を10から3000まで変化させそれぞれ計算を行った。ここで、流入部の流速 U_{in} 、水路幅 d 、動粘性係数 ν を用いて $Re = U_{in} \cdot d / \nu$ と定義した。

ここでは、 $Re = 10$ および $Re = 2000$ の流速ベクトルをそれぞれ図4および図5に示す。粘性が大きい $Re = 10$ の方が流速が小さく抑えられている等、両者は異なる流れとなることが分かる。特に正方形物体後方においては、 $Re = 10$ では物体で分かれた流れがすぐに合流しているのに対し、 $Re = 2000$ では剥離がおき、後流にお

いて渦の発生が見られた。

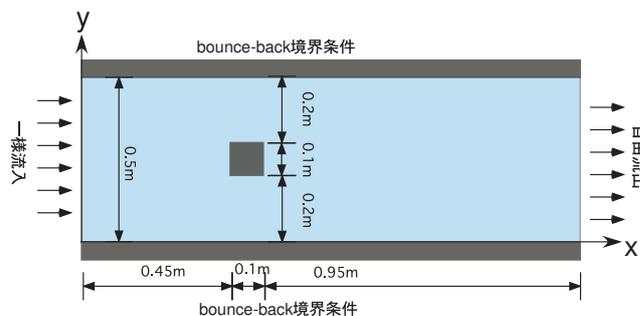


図-3 解析領域定義図

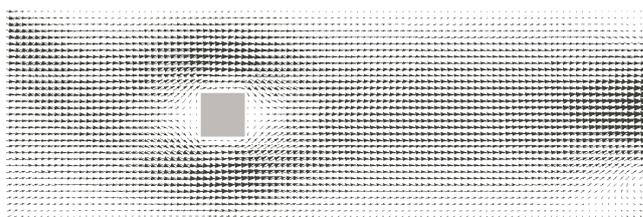


図-4 $Re = 10$ の流れのベクトル図($t = 20$ (s))

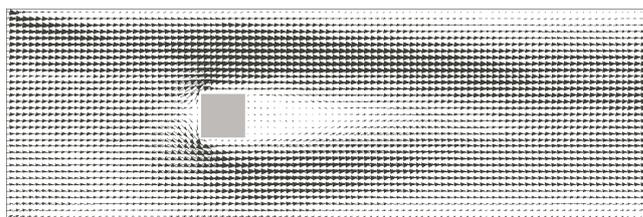


図-5 $Re = 2000$ の流れのベクトル図($t = 20$ (s))

4. 結論

まず2次元poiseuille流れによりLBMの検証を行った。LBM解は解析解と非常に良く一致したが、適切な動粘性係数の範囲を選ぶ必要が有る。また、物体周りの流れにおいても、流れを良好に再現することができた。今後は実験値等との比較を通し、流れの定量的な評価を行うことが必要である。

参考文献

- 大家隆行, 越村俊一, 今村文彦, ダムブレイク問題における格子ボルツマン法の適用性に関する一考察, 土木学会東北支部技術研究会講演概要集, II-33, 2007.
- Nils T., Physically based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method. University of Erlangen-Nuremberg, Phd-Thesis, 145p, 2007.